Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T\mathbf{B}$ je pozitivně semidefinitní, kde $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (b) (2 b) Množina $\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2$ je konvexní, kde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ a $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{e}^{x_1} \leq x_2\}$.
   (c) (2 b) Kvadratická forma $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňující $f(\mathbf{x}) = -2$ a $f(\mathbf{y}) = 3$ je konvexní, kde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
   (d) (2 b) Bod $(0, 0)$ je regulární bod zobrazení $\mathbf{g}(x, y) = ((x-1)^2 + y^2 - 1, (x-2)^2 + y^2 - 4)$.
   (e) (2 b) Matice $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ má singulární rozklad

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

(a) Ano. Součet PSD matic je PSD matice. Matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ je vždy PSD.

(b) Ano. Je to množina všech řešení konvexní opt. úlohy, neboť funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_2$ je konvexní (složení afinní funkce s normou) a množina X je konvexní (epigraf konvexní funkce).

(c) Ne. Taková forma je z definice indefinitní, tj. její matice $\mathbf{A}$ je indefinitní. Ovšem Hessova matice funkce f je $\mathbf{A}$ a tedy f nemůže být konvexní.

(d) Ne. Zobrazení $\mathbf{g}$ má spojitou derivaci, ale Jacobiho matice v bodě $(0, 0)$ je $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) Ano. Singulární čísla: $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, levé singulární vektory jsou ve sloupcích matice vlevo a pravé singulární vektory jsou v řádcích matice vpravo.

2. Máme n naměřených dat $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ a chceme jimi proložit parabolu danou vzorcem $p(x) = ax^2 + b$ tak, aby součet čtverců hodnot $p(x_i) - y_i$ byl minimální.
   (a) (2 b) Zformulujte tuto optimalizační úlohu maticově a specifikujte dané matice.
   (b) (4 b) V případě $n = 3$ máme data $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$. Najděte vzorec pro p.
   (c) (4 b) Místo kritéria nejmenších čtverců použijeme minimální součet absolutních odchylek $|p(x_i) - y_i|$. Napište úlohu pro data z části (b) jako lineární program.

Řešení:

(a) Lineární regrese s funkcí p. Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ obsahuje v prvním sloupci x_i^2, ve druhém sloupci jedničky, optimalizační úloha zní: $\min\{\|\mathbf{A}\mathbf{u}-\mathbf{y}\|^2\}$ kde hledáme neznámý vektor parametrů $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Pro konkrétní případ je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{y} = (1, 3, 5)$, normální rovnice jsou $\begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 23 \\ 9 \end{bmatrix}$ a jejich řešení je $\mathbf{u} = (a, b) = (\frac{12}{13}, \frac{19}{13})$.

(c) Minimalizujeme $z_1 + z_2 + z_3$ za podmínek $-z_1 \le b - 1 \le z_1$, $-z_2 \le a + b - 3 \le z_2$, $-z_3 \le 4a + b - 5 \le z_3$, kde $z_1, z_2, z_3 \ge 0$ (může být i $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$) a $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. (10 b) Najděte všechny lokální i globální extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 - y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 \le 9$. Funkci f v nich vyhodnoťte a řekněte, o jaký typ extrému se jedná.

Řešení:

Vše jsou polynomy, mají všechny derivace spojité.

$$f'(x, y) = (2(x-1), -2y)^{\mathsf{T}},$$
$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A. Volné extrémy dostaneme řešením soustavy

$$f'(x, y) = (2(x-1), -2y)^{\mathsf{T}} = \mathbf{0},$$

$x = 1$, $y = 0$, $f(1, 0) = 0$, ale $f''(x, y)$ je indefinitní matice, takže $(1, 0)$ je sedlový bod a volný extrém neexistuje.

B. Extrémy vázané podmínkou $g(x, y) = 0$, kde $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$, $g'(x, y) = (2x, 2y)^{\mathsf{T}}$ (všechny body hranice jsou regulární body zobrazení g), dostaneme jako stacionární body Lagrangeovy funkce $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$, neboli řešením soustavy

$$f'(x, y) + \lambda\, g'(x, y) = (2\,(x-1) + 2\,\lambda\, x, -2\,y + 2\,\lambda\, y) = \mathbf{0},$$

tj.

$$(\lambda + 1)\, x = 1,$$
$$(\lambda - 1)\, y = 0.$$

Činitel $\lambda + 1$ musí být nenulový.

B1. Pro $\lambda = 1$ vyjde $x = \frac{1}{2}$, dosazením do omezující podmínky $x^2 + y^2 - 9 = 0$ dostaneme $y = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{35}}{2}\right) = -\frac{34}{4} = -\frac{17}{2}$.

B2. Pro $\lambda \neq 1$ vyjde $y = 0$, z omezující podmínky $x = \pm 3$. Funkční hodnoty jsou $f(3,0) = 4$, $f(-3,0) = 16$.

Závěr: Našli jsme 4 stacionární body Lagrangeovy funkce. Jelikož je kritérium spojité na hranici oblasti (kterou je kružnice), klasifikaci stacionárních bodů poznáme z funkčních hodnot. V bodě $(-3,0)$ je globální maximum 16, v bodě $(3,0)$ je lokální maximum 4, v bodech $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{35}}{2})$ jsou globální minima $-\frac{17}{2}$. Jiné extrémy (ani lokální) neexistují.

B2a. (Aternativní řešení.) Parametrizujeme kružnici

$$\begin{aligned}
(x,y) &= (3\cos\phi, 3\sin\phi), \text{ potom} && (1)\\
f(\phi) &= (3\cos\phi - 1)^2 - 9\sin^2\phi, && (2)\\
f'(\phi) &= -6\sin\phi(6\cos\phi - 1), && (3)\\
f''(\phi) &= -6\cos\phi(6\cos\phi - 1) + (6\sin\phi)^2\,. && (4)
\end{aligned}$$

První dvojice stacionárních bodů je: sin = 0, tedy $(x,y) = (\pm 3, 0)$. Pro $(3,0)$ (tedy sin = 0, cos = 1) je $f'' < 0$, stejně jako pro $(-3,0)$.

Druhá dvojice je: cos = $\frac{1}{6}$, tedy $(x,y) = (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{35}}{2})$. Pro tyto body je $f'' = 0 + (6\sin)^2 > 0$, tedy jde o lokální minima.

B2b. Vyšetření stacionárních bodů z B2. pomocí podmínek druhého řádu.

$$g''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Pro $\lambda = 1$ máme stacionární body viz nahoře a $H = f'' + \lambda g'' = \operatorname{diag}(4,0)$. Hessián je pozitivně semidefinitní, musíme ho tedy otestovat přímo v prostoru $\operatorname{null} g'$. Označme souřadnice stacionárního bodu (x_1, y_1). Protože $g'(x,y) = (2x, 2y)$, je báze $\operatorname{null} g'$ třeba vektor $t = (-y_1, x_1)^T$ a $t^T H t = 4y_1^2 > 0$. Jde tedy o lokální minima.

Bodu $(x,y) = (3,0)$ odpovídá $\lambda = -\frac{2}{3}$ a $H = \operatorname{diag}(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$. Podobně jako prve musíme do tečného prostoru, $t = (0,1)^T$ a $t^T H t < 0$. Podobně pro $(x,y) = (-3,0)$ je $\lambda = -\frac{4}{3}$ a $H = \operatorname{diag}(-\frac{2}{3}, -\frac{14}{3})$. Hessián je negativně definitní na celém prostoru, tedy i na prostoru $\operatorname{null} g'$ a jsme hotoví (oba body jsou lokální maxima, to větší je globální).

4. Máme 100 bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{100} \in \mathbb{R}^3$, které chceme proložit přímkou procházející počátkem tak, aby součet čtverců kolmých vzdáleností od těch bodů k přímce byl minimální.
   (a) (3 b) Přesně formulujte optimalizační úlohu.
   (b) (1 b) Jde o úlohu konvexní?
   (c) (4 b) Napište, jak vypadá optimální řešení této úlohy. Všechy matice i vektory přesně definujte.
   (d) (2 b) Jaká je chyba proložení v optimu?

Řešení:

(a) $\min \sum_{i=1}^{100} \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{a}_i\|_2^2$ nebo $\max \sum_{i=1}^{100} \|\mathbf{x}^T\mathbf{a}_i\|_2^2$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ splňuje $\|\mathbf{x}\| = 1$.

(b) Nejde. Množina přípustných řešení je sféra (povrch koule).

(c) Píšeme $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{100}] \in \mathbb{R}^{3\times 100}$. Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ má vlastní čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ a odpovídající vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, kde $\|\mathbf{v}_i\| = 1$. Hledaný směr přímky je $\mathbf{v}_1$.

(d) Chyba proložení je $\lambda_2 + \lambda_3$.