

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (3 body) Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Najděte báze těchto podprostorů:  $\text{rng } \mathbf{A}$ ,  $\text{null } \mathbf{A}$ ,  $(\text{rng } \mathbf{A})^\perp$ ,  $(\text{null } \mathbf{A})^\perp$ .

Matice má  $\text{rank} = 3$ , první tři její sloupce jsou LN, takže mohou tvořit bázi  $\text{rng } \mathbf{A}$ .

Řešením soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  je například  $(-1, -1, 0, 3)$ , takže může tvořit bázi  $\text{null } \mathbf{A}$ .

Řešením soustavy  $\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$  je například  $(1, -1, 1, -1)$ , takže může tvořit bázi  $(\text{rng } \mathbf{A})^\perp$ .

Protože  $(\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{rng } \mathbf{A}^T$  a první tři řádky matice  $\mathbf{A}$  jsou LN, mohou tvořit bázi  $(\text{null } \mathbf{A})^\perp$ .

2. (2 body) Najděte nejmenší vzdálenost bodu  $\mathbf{z} = (0, 1, 1, 0)$  od množiny všech bodů  $\mathbf{x}$ , které jsou řešením rovnice  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = 5$ , kde  $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 0)$ . Použitý vzorec zdůvodněte.

Vzdálenost bodu  $\mathbf{z}$  od nadroviny  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  je stejná, jako vzdálenost projekce  $\mathbf{z}$  od projekce partikulárního řešení  $\mathbf{p}$  do  $\text{rng } \mathbf{a}$ , což jest

$$\left\| \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{z}}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{p}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}(\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b)\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} |\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|,$$

v našem případě  $(1/3) |4 - 5| = 1/3$ .

3. (2 body) Najděte spektrální rozklad matice  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  ve tvaru  $a_1 \mathbf{M}_1 + a_2 \mathbf{M}_2$ .

Charakteristický polynom  $\lambda^2 - 4\lambda + 3$  dává vlastní čísla  $\lambda_1 = 3$  a  $\lambda_2 = 1$ , těm odpovídají normované vlastní vektory  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$  a  $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  a platí

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Pozorujeme data  $(0, 1), (1, 4), (2, 10), (3, 20)$  ve tvaru  $(x_i, y_i)$ . Hledáme optimální regresní funkci  $y = \alpha x + \beta$ , kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  jsou neznámé parametry.

a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.

b) (2 body) Vyřešte tento problém a výsledek zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Hledáme  $\mathbf{z} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  minimalizující  $\|\mathbf{Az} - \mathbf{b}\|^2$ . To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic  $\mathbf{A}^T \mathbf{Az} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ , což je soustava

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 35 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je přibližně  $\alpha = 6.3$  a  $\beta = -0.7$ .

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

**ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.**

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (3 body) Nechť  $X = \text{span}\{(1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2)\}$ ,  $\mathbf{z} = (3, 0, 3, 0)$ . Najděte kolmou projekci vektoru  $\mathbf{z}$

- a) na  $X$ ,  
b) na  $X^\perp$ .

Je snadnější začít podúlohou b), protože  $X^\perp$  má dimenzi 1 a jeho bázi tvoří nějaké nenulové řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , kde zadané tři vektory tvoří řádky matice  $\mathbf{A}$ . Je tedy  $X^\perp = \text{span}\{(-1, 1, -1, 1)\}$ . Při značení  $\mathbf{u} = (-1, 1, -1, 1)/2$  (tento vektor má jednotkovou velikost a leží v  $X^\perp$ ) je projekce na  $X^\perp$  rovna  $\mathbf{uu}^T\mathbf{z} = (-1, 1, -1, 1)/2(-6/2) = (3/2)(1, -1, 1, -1)$ . Projekce na  $X$  je rejeckce na  $X^\perp$  a tedy je  $(3, 0, 3, 0) - (3/2)(1, -1, 1, -1) = (3/2)(1, 1, 1, 1)$ .

2. (2 body) Najděte ortonormální bázi nulového prostoru zobrazení  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , které je dáno předpisem  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ , kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  jsou například vektory  $(0, 1, 0, -1), (1, 0, -1, 0)$ . Jsou LN a tvoří bázi množiny řešení, protože  $\text{rank } \mathbf{A} = 2$ . Jsou na sebe kolmé. Aby tvořily ortonormální bázi, stačí je normalizovat:  $\{(0, 1, 0, -1)/\sqrt{2}, (1, 0, -1, 0)/\sqrt{2}\}$ .

3. Závislost proměnné  $z$  na proměnných  $x, y$  modelujeme regresní funkcí  $z \approx f(x, y) = a(xy)^2 + b(x + y)^2 + c$ . Odhadujeme parametry  $a, b, c \in \mathbb{R}$  funkce  $z$  naměřených bodů  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, 50$ , ve smyslu nejmenších čtverců.

- a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.  
b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné optimální řešení? Takové řešení napište.

a) Vektor neznámých parametrů je  $\mathbf{p} = (a, b, c)$ , matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{50 \times 3}$  má v řádku  $i$  vektor  $((x_i y_i)^2, (x_i + y_i)^2, 1)$  a dále  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{50})$ . Hledáme minimum funkce  $\|\mathbf{Ap} - \mathbf{z}\|^2$ . b) Má-li  $\mathbf{A}$  lineárně nezávislé sloupce, pak je jediné optimální řešení  $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$ .

4. (2 body) Najděte spektrální rozklad matice  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  ve tvaru  $a_1\mathbf{M}_1 + a_2\mathbf{M}_2$ .

Vlastní čísla matice  $2\mathbf{A}$  jsou dvojnásobky vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$  a vlastní vektory zůstávají stejné. Charakteristický polynom pro matici  $2\mathbf{A}$  je  $\lambda^2 - 10\lambda + 24$ , což dává řešení 6 a 4 a tedy vlastní čísla  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$  matice  $\mathbf{A}$ . Těm odpovídají normované vlastní vektory  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  a  $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$  a platí

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

Správná odpověď je vždy (a)

- Nechť  $\mathbf{A}$  je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null  $\mathbf{A}^T$  je
  - $\mathbf{O}$
  - $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
  - $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
  - $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
 II (e) neplatí žádné uvedené tvrzení
- Nechť  $\mathbf{A}$  je matice s lineárně nezávislými sloupci. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null  $\mathbf{A}^T$  je
  - $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
  - $\mathbf{O}$
  - $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
  - $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
 II (e) neplatí žádné uvedené tvrzení
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  je regulární právě když
  - $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé řádky
  - $\mathbf{A}$  má lineárně nezávislé sloupce
  - $\mathbf{A}$  má levou inverzi
  - soustava  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má více než jedno řešení
  - $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  je regulární
- Rozhodněte, co je správně.
  - $\text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leq \min\{\text{rank } \mathbf{A}, \text{rank } \mathbf{B}\}$
  - $\text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{rank } \mathbf{A} \text{ rank } \mathbf{B}$
  - $\text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \min\{\text{rank } \mathbf{A}, \text{rank } \mathbf{B}\}$
  - $\text{rng } \mathbf{A}\mathbf{B} \subseteq \text{rng } \mathbf{B}$
  - $\text{rng } \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{rng } \mathbf{A}$
- Pro která  $a \in \mathbb{R}$  je matice  $\begin{bmatrix} 1/2 & a \\ a & 1/2 \end{bmatrix}$  ortogonální projektor?
  - pro  $a = \frac{1}{2}$
  - pro  $a = 0$
  - pro  $a \in \{0, \frac{1}{4}\}$
  - pro  $a = \frac{1}{4}$
  - pro libovolné  $a \in \mathbb{R}$
- Kvadratická funkce  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 4$  v bodě  $(0, 0)$ 
  - má minimum
  - má maximum
  - nemá ani minimum ani maximum
  - má lokální maximum
  - nabývá nulové hodnoty

7. Pro spektrální rozklad matice  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , kde  $\mathbf{A}$  je reálná matice typu  $10 \times 100$ , platí:
- (a) Vlastní vektory lze volit po dvou ortogonální
  - (b) Všechna vlastní čísla jsou různá
  - (c) Z vlastních vektorů lze vytvořit bázi prostoru  $\mathbb{R}^{100}$
  - (d) Největší vlastní číslo je kladné
  - (e) Neplatí žádné uvedené tvrzení
8. Pro úlohu nejmenších čtverců  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ , kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , platí
- (a) Neplatí žádné uvedené tvrzení
  - (b) Úloha má jediné optimální řešení
  - (c) Množina všech optimálních řešení tvoří lineární prostor
  - (d) Úloha má vždy optimální řešení  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$
  - (e) Úloha má optimální řešení jen v případě, že  $\text{rank } \mathbf{A} = n$
9. Metodou nejmenších čtverců řešíme lineární regresi  $f(x) = ax + b$  pro data tvaru  $(x_i, y_i)$ , kde  $i = 1, \dots, 500$  a  $x_i \neq x_j$  pro nějaká  $i \neq j$ .
- (a) Úloha má jediné optimální řešení
  - (b) Uvedený problém nelze nijak transformovat na řešení soustavy lineárních rovnic
  - (c) Optimální hodnoty parametrů  $a, b$  splňují  $a \neq b$
  - (d) Pro optimální hodnoty parametrů  $a, b$  vždy platí  $ax_i + b = y_i$  pro nějakou dvojici  $(x_i, y_i)$
  - (e) Neplatí žádné uvedené tvrzení
10. Pro matici  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  platí toto:
- (a)  $\mathbf{A}$  je indefinitní
  - (b)  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  je indefinitní
  - (c)  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  je negativně definitní
  - (d)  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$  neexistuje
  - (e) kvadratická forma  $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$  má globální maximum v bodě  $(0, 0)$