Optimalizace

Modelování pomocí LP

Tomáš Kroupa   Tomáš Werner

2024

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Obsah přednášky

1. Citlivost úlohy LP
2. Celočíselné úlohy (ILP)
3. Formulace různých úloh (MILP)

Citlivost úlohy LP

Vliv pravé strany omezení na optimální hodnotu

Jak se změní minimální náklady $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^*$ *na optimální mix surovin* $\mathbf{x}^*$ *při malé změně požadovaného množství* $\mathbf{b}$ *jednotlivých živin?*

$$\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

- Pravá strana se změní na $\mathbf{b} + \boldsymbol{\Delta}$
- Jak tato změna ovlivní funkci optimální hodnoty

$$f(\mathbf{b}) := \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \qquad ?$$

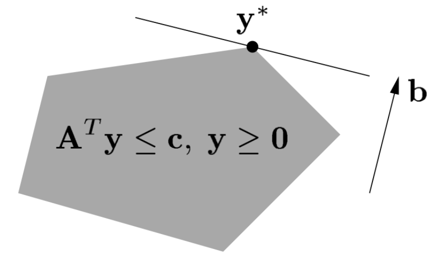
- Pokud má předchozí úloha optimum, podle silné duality platí

$$f(\mathbf{b}) = \max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Citlivost primární úlohy a duální proměnné

Věta

Nechť má duální úloha pro nějaké $\mathbf{b}$ jediné optimální řešení $\mathbf{y}^*$.
Pak je f na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ lineární a $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.



Tedy hodnota nového optima bude

$$f(\mathbf{b} + \boldsymbol{\Delta}) = f(\mathbf{b}) + \boldsymbol{\Delta}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*.$$

Příklad

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 5.402 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 3.01 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq & 3 \\
 & -x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq & -1 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
\max & 3.01y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 & = & 5.402 \\
0.2 = & y_1 & \geq & 0 \\
0 = & y_2 & \geq & 0 \\
1.6 = & y_3 & \geq & 0 \\
0 = & y_4 & \geq & 0 \\
 & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 & \leq & 2 \\
 & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 & \leq & 5 \\
 & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 & \leq & 6
\end{array}
$$

$$f(\mathbf{b}) + \boldsymbol{\Delta}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}^* = 5.4 + (0.01,\ 0,\ 0,\ 0)^T\ (0.2,\ 0,\ 1.6,\ 0) = 5.402$$

Celočíselné lineární úlohy

Celočíselné lineární programování (ILP)

Celočíselný LP

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

LP s binárními proměnnými

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n\}$$

LP relaxace poslední úlohy je úloha

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0,1]^n\}$$

- Je-li původní úloha přípustná, LP relaxace je také přípustná
- Optimální hodnota LP relaxace je dolním odhadem optimální hodnoty původní úlohy

Integrality gap

Mezera celočíselnosti je podíl pravé a levé strany:

$$\min\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0,1]^n\} \leq \min\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n\}$$

Optimální řešení LP relaxace

- Jen výjimečně je to i optimální řešení původní úlohy
- Někdy umožní sestrojit řešení s požadovanou přesností
- Pro některé úlohy je opt. hodnota LP relaxace nicneříkající

Příklad

Hledáme vzájemně jednoznačné přiřazení učitelů k předmětům, které bude maximalizovat skóre:

Table 20.3 Evaluation of Teachers' Performances

	Course 1	Course 2	Course 3	Course 4	Course 5
Teacher 1	7	5	4	4	5
Teacher 2	7	9	7	9	4
Teacher 3	4	6	5	8	5
Teacher 4	5	4	5	7	4
Teacher 5	4	5	5	8	9

V. Chvátal. *Linear Programming*, 1983.

Přiřazovací problém

- Jsou zadány 2 množiny n objektů a ceny c_{ij} za jejich spárování
- Přiřazení reprezentujeme permutační maticí o složkách x_{ij}
- Hledáme přiřazení minimalizující celkovou cenu

Assignment Problem s binárními proměnnými $x_{ij} \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

LP relaxace přiřazovacího problému

V relaxované úloze je hledané přiřazení vyjádřeno pomocí dvojitě stochastické matice o složkách x_{ij}.

Assignment Problem s reálnými proměnnými $x_{ij} \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Optimální řešení přiřazovacího problému

Věta

Pro přiřazovací problém platí:

1. LP relaxace i původní úloha mají stejnou optimální hodnotu
2. Mezi optimálními řešeními LP relaxace existuje celočíselné

Plyne to z této věty:

Věta (Birkhoff–von Neumann)

Množina všech dvojitě stochastických matic řádu n je omezený konvexní polyedr v $\mathbb{R}^{n^2}$ jehož vrcholy jsou permutační matice.

Příklad – optimální přiřazení učitelů k předmětům (Julia)

```julia
import Pkg
Pkg.add("JuMP")
Pkg.add("GLPK")
using JuMP
using GLPK

A = [
    7 5 4 4 5;
    7 9 7 9 4;
    4 6 5 8 5;
    5 4 5 7 4;
    4 5 5 8 9;
]

model = Model(GLPK.Optimizer)

@variable(model, 0 <= X[1:5, 1:5] <= 1);
@constraint(model, sum(X, dims=1) .== 1);
@constraint(model, sum(X, dims=2) .== 1);
@objective(model, Max, sum(A .* X));

optimize!(model)
optX = Int.(value.(X))
optvalue = sum(A .* optX)
@show optX
@show optvalue
```

Optimální řešení

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Optimální hodnota 38

Nejmenší vrcholové pokrytí

Kolik hlídačů musíme umístit do vrcholů grafu, aby byla každá hrana monitorována?

Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu (V, E) je podmnožina $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X.

Minimal Vertex Cover s proměnnými $x_i \in \{0,1\}$, kde $i \in V$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \geq 1, \quad \forall \{i,j\} \in E \end{aligned}$$

LP relaxace nejmenšího vrcholového pokrytí

Úloha s proměnnými $x_i \in [0,1]$, kde $i \in V$

$$\min \quad \sum_{i \in V} x_i$$

$$\text{za podmínek} \quad x_i + x_j \geq 1, \quad \{i,j\} \in E$$

Již pro úplný graf o 3 vrcholech dostaneme

$$\text{opt. hodnota relaxace} = 1.5 \quad < \quad 2 = \text{opt. hodnota}$$

LP relaxace nejmenšího vrcholového pokrytí – vlastnosti

Definujme:

- y^* je optimální hodnota původní úlohy
- $(x_i)_{i \in V}$ je optimální řešení relaxace a $y := \sum_{i \in V} x_i$
- Zaokrouhlené řešení relaxace $\bar{x}_i := \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$ a $\bar{y} := \sum_{i \in V} \bar{x}_i$

Tvrzení

Pro každý graf (V, E) je zaokrouhlené řešení přípustným celočíselným řešením a platí

$$y^* \leq \bar{y} \leq 2y^*, \qquad \frac{1}{2}y^* \leq y \leq y^*.$$

Největší nezávislá množina

Kolik mohu pozvat na party rozhádaných kamarádů, abych nezkazil zábavu?

Podmnožina $X \subseteq V$ neorientovaného grafu (V, E) je nezávislá, pokud žádné dva vrcholy z X nejsou spojeny hranou.

Maximum Independent Set s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in V$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E \end{aligned}$$

LP relaxace – největší nezávislá množina

Maximum Independent Set s proměnnými $x_i \in [0,1]$, $i \in V$

$$\max \quad \sum_{i \in V} x_i$$

$$\text{za podmínek} \quad x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i,j\} \in E$$

- Relaxace má přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2} (i \in V)$ o hodnotě $\frac{1}{2}|V|$
- Tedy optimální hodnota LP relaxace splňuje $y \geq \frac{1}{2}|V|$
- Ale pro úplný graf je optimální hodnota úlohy $y^* = 1$!

Další úlohy

- Problém obchodního cestujícího
- Toky v sítích
- Problém batohu
- Rozvrhování

Smíšené celočíselné programování (MILP)

$$\min \left\{ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{y} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \geq \mathbf{b},\, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n_1},\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}$$

Algoritmy pro řešení celočíselných úloh

Úloha celočíselného programování je NP-těžká. Nejpoužívanější algoritmy obvykle využívají v některém kroku lineární programování, pro nějž existuje polynomiální algoritmus.

- Metoda větví a mezí (branch and bound)
- Metoda sečných nadrovin

Formulace úloh LP

Omezení hodnot proměnných a účelové funkce

1. Proměnná x může nabývat jen hodnot $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$
2. Logická omezení binárních proměnných
3. Nespojitost v účelové funkci
4. Množina přípustných řešení je nekonvexní polyedr