Optimalizace

Dualita v LP

Tomáš Kroupa   Tomáš Werner

2024

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Dualita

Primární úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Duální úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Duální úlohu lze definovat pro úlohu LP v libovolné formě
- Duál duální úloha je primární úloha

Věta o slabé dualitě

$$
\begin{array}{rrcl}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \\
\text{za podm.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrcl}
\max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} & & \\
\text{za podm.} & \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\
& \mathbf{A}^T\mathbf{y} & \leq & \mathbf{c}
\end{array}
$$

Tvrzení

1. Pro každé přípustné primární řešení $\mathbf{x}$ a každé přípustné duální řešení $\mathbf{y}$ platí $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$
2. Pokud pro nějaká přípustná řešení primáru $\mathbf{x}^*$ a duálu $\mathbf{y}^*$ platí $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$, potom jsou $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ optimální řešení

- Duální LP zdola omezuje primární LP
- Pokud je mez těsná, nalezli jsme optimum obou úloh

Dvojice duálních úloh pro LP v obecném tvaru

$\min \sum_{j \in J} c_j x_j$		$\max \sum_{i \in I} y_i b_i$	
za podm. $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$	za podm.	$y_i \in \mathbb{R}$	$\forall i \in I_0$
$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$		$y_i \geq 0$	$\forall i \in I_+$
$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i$		$y_i \leq 0$	$\forall i \in I_-$
$x_j \in \mathbb{R}$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j$	$\forall j \in J_0$
$x_j \geq 0$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j$	$\forall j \in J_+$
$x_j \leq 0$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j$	$\forall j \in J_-$

Příklad

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & & \\
\text{z.p.} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_2 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 6y_1 & + & 5y_2 & & & & \\
\text{z.p.} & & & & & y_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & y_2 & \leq & 0 \\
 & & & & & y_3 & \geq & 0 \\
 & 2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \leq & 2 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & = & 0 \\
 & y_1 & - & 3y_2 & - & y_3 & \leq & - \\
 & 2y_1 & & & - & 3y_3 & \geq & 1
\end{array}
$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \\
\text{za podm.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} &=& \ \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} &\geq& \ \mathbf{0}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y} & & \\
\text{za podm.} \quad & \mathbf{y} &\in& \ \mathbb{R}^m \\
& \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq& \ \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Podmínky komplementarity

- I je indexová množina primárních omezení (duál. proměnných)
- J je indexová množina duálních omezení (prim. proměnných)

Věta

Nechť $\mathbf{x}$ je přípustné primární řešení a $\mathbf{y}$ je přípustné duální řešení. Rovnost $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ platí právě tehdy, když platí tyto podmínky:

1. $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$ nebo $y_i = 0$ $\quad \forall i \in I$
2. $x_j = 0$ nebo $\sum_{i \in I} a_{ij} y_i = c_j$ $\quad \forall j \in J$

Příklad

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \min & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = 5.4 \\
3 = & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 3 \\
2.4 = & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq 1 \\
3 = & & x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq 3 \\
-0.6 = & & -x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq -1 \\
1.2 = & & x_1 & \geq 0 \\
0.6 = & & x_2 & \geq 0 \\
0 = & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max & 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 & = 5.4 \\
0.2 = & & y_1 & \geq 0 \\
0 = & & y_2 & \geq 0 \\
1.6 = & & y_3 & \geq 0 \\
0 = & & y_4 & \geq 0 \\
2 = & & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 & \leq 2 \\
5 = & & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 & \leq 5 \\
3 = & & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

Věta o silné dualitě

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Primární úloha má optimální řešení $\mathbf{x}^*$.
2. Duální úloha má optimální řešení $\mathbf{y}^*$.

Pokud platí jedno z těchto tvrzení, pak $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

- V optimu jsou hodnoty obou úloh shodné (zero duality gap)
- Pro optimum primární úlohy tak představuje optimum duálu se stejnou hodnotou tzv. certifikát optimality

Vlastnosti primáru a duálu – možnosti

P/**D**	Má optimum	Neomezená	Nepřípustná
Má optimum	✓	ne	ne
Neomezená	ne	ne	✓
Nepřípustná	ne	✓	✓

- Červeně zakázané kombinace plynou ze silné duality
- Zbylá plyne ze slabé duality
- Platí: **P** a **D** mají optimum $\Leftrightarrow$ **P** a **D** jsou přípustné