# Optimalizace

## Úvod do lineárního programování

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2024

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

# Lineární programování (LP)

- Minimalizace lineární funkce při lineárních omezeních
- Efektivní algoritmy na výpočet globálního optima pro velmi rozsáhlé úlohy (desítky tisíc proměnných)
- Na pomezí spojité a kombinatorická optimalizace

## Aplikace

- Optimalizace produkčních kapacit
- Regrese a aproximace
- Teorie her
- Nejlepší přiřazení
- Toky v síti

# Základní pojmy a příklady

# Definice úlohy LP a její maticový tvar

## Úloha LP

$$\begin{aligned} \text{Minimalizuj} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podmínek} \quad & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Množina přípustných řešení je konvexní polyedr v $\mathbb{R}^n$
- Maticový zápis pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- Uvedený tvar úlohy LP postihuje $\leq$ i $=$

# Transformace do rovnicového tvaru

**Rovnicový tvar úlohy LP**

$$\min \{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Každou úlohu LP převedeme do tohoto tvaru pomocí 2 úprav:

1. Přidání nezáporné slackové proměnné pro každé omezení ve tvaru nerovnosti
2. Vyjádření neomezené reálné proměnné $x$ jako $x = x^+ - x^-$, kde $x^+ \geq 0$ a $x^- \geq 0$

# Typické úlohy

### Maximalizace zisku z vyráběných produktů $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových zisků z prodeje produktů
- $\mathbf{A}$ udává spotřebu materiálu $i$ při výrobě produktu $j$
- $\mathbf{b}$ udává disponibilní množství jednotlivých materiálů

Maximalizuj celkový zisk $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

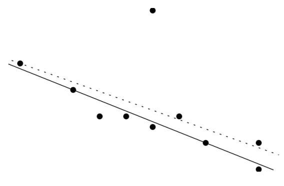
### Minimalizace nákladů na mix surovin $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových cen surovin
- $\mathbf{A}$ udává množství látky $i$ obsažené v surovině $j$
- $\mathbf{b}$ udává požadované množství jednotlivých látek v mixu

Minimalizuj celkové náklady $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

## Lineární regrese s vychýlenými hodnotami

- Chceme proložit data $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ vhodnou lineární regresní funkcí $f(x, \boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \varphi_1(x) + \cdots + \theta_n \varphi_n(x)$
- Některé hodnoty $y_i$ jsou vychýlené (outliers)
- Nechceme, aby takové hodnoty příliš ovlivnily odhad $\boldsymbol{\theta}$



### Úloha robustní regrese

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})|, \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

# Čebyševova aproximace

- Aproximovaná funkce má v bodech $x_i$ hodnoty $y_i$
- Hledáme aproximující polynom $p(x, \boldsymbol{\theta})$ s koeficienty $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$
- Chceme garanci maximální možné chyby

**Úloha na minimax**

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{m} |y_i - p(x_i, \boldsymbol{\theta})|, \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

Obě předchozí úlohy lze formulovat pomocí LP jako hledání přibližného řešení přeurčené soustavy lineárních rovnic.

# Přibližné řešení přeurčené soustavy v různých normách

Hledejme řešení úlohy

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_p$$

pro $p = 1, 2, \infty$:

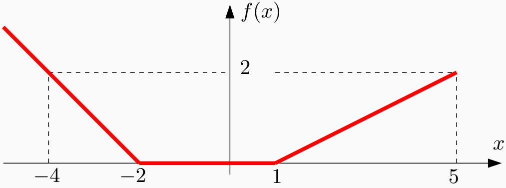
- Pro $p = 2$ má úloha řešení ve smyslu nejmenších čtverců.
- Pro $p = 1, \infty$ lze formulovat jako úlohu LP.

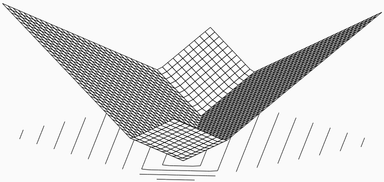
# Transformace na úlohy LP

# Konvexní po částech afinní funkce

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^{k} (\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i), \qquad \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^n, d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}\,.$$



# Minimalizace konvexní po částech afinní funkce

Následující dvě úlohy jsou ekvivalentní:

**Úloha 1**

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{k} \left(\mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i\right) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

**Úloha 2**

$$\text{Minimalizuj } y \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i \leq y \ \forall i, \ \ (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

# Řešení přeurčené soustavy pomocí LP

Řešení úlohy $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p$ pro $p = 1, \infty$ se nalezne takto:

**$p = \infty$**

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP:

$$\text{Minimalizuj } y \quad \text{z.p. } -y \le \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i \le y \ \ \forall i$$

**$p = 1$**

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP:

$$\text{Minimalizuj } \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{z.p. } -y_i \le \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i \le y_i \ \ \forall i$$

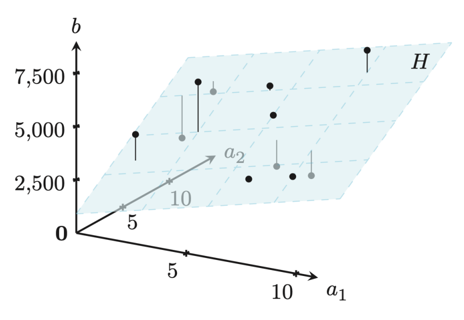
# Příklad (1)

Odhadujeme neznámé parametry $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ lineární regresní funkce

$$f(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \theta_3$$

na základě pozorování $a_{i1}, a_{i2}$ a $b_i$, kde $i = 1, \ldots, 11$.

| **Person** $i$ | $b_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4,585 | 2 | 10 |
| 2 | 7,865 | 9 | 10 |
| 3 | 3,379 | 7 | 2 |
| 4 | 6,203 | 3 | 6 |
| 5 | 2,466 | 1 | 9 |
| 6 | 3,248 | 7 | 5 |
| 7 | 4,972 | 6 | 7 |
| 8 | 3,437 | 9 | 4 |
| 9 | 3,845 | 1 | 4 |
| 10 | 3,878 | 9 | 2 |
| 11 | 5,674 | 5 | 9 |



# Příklad (2)

## Původní úloha

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{11} |b_i - \theta_1 a_{i1} + \theta_2 a_{i2} + \theta_3| \quad \text{za podmínky } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$$

## Ekvivalentní LP

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{11} y_i \quad \text{za podmínek } (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{11}$$

$$-y_i \leq b_i - \theta_1 a_{i1} + \theta_2 a_{i2} + \theta_3 \leq y_i \quad i = 1, \ldots, 11$$