LGR — ukázkový druhý semestrální test, cvičení 00:00, 72. června 2245
Vaše jméno a příjmení:

Část první

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2 \\
\mathsf{Func} &= \{f,\ g\}, \quad ar(f) = 1,\ ar(g) = 2 \\
\mathsf{Kons} &= \{a\}
\end{aligned}
$$

Interpretace I jazyka $\mathcal{L}$ je dána následovně:

$$
\begin{aligned}
U &= \mathbb{N} \\
[\![R]\!] &= \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m + n \leq 15\} \\
[\![f]\!] : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
n &\mapsto n + 2 \\
[\![g]\!] : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N} \\
(m,n) &\mapsto m \cdot n \\
[\![a]\!] &= 5
\end{aligned}
$$

Úloha 1, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5\rangle$ Formule φ je definována jako $\forall x \exists y R(x,y)$. Ověřte pravdivost sentence φ, tedy rozhodněte, zda $I \vDash \varphi$.

Úloha 2, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5\rangle$ Nechť seznam deklarovaných proměnných je $D = (x)$ a formuli ψ definujme jako $R(g(x,x), f(f(a)))$. Spočtěte význam formule ψ, tedy nalezněte $[\![\psi]\!]_D$.

Řešení. $I \nvDash \varphi$, neboť pro kontext proměnných $\rho = \varepsilon[x := 16]$, tedy kontext

$$\rho : x \mapsto 16$$

neexistuje update proměnné y o hodnotu d takový, aby platilo

$$I \vDash_{\rho[y:=d]} R(x,y).$$

Pro žádné $d \in \mathbb{N}$ totiž neplatí

$$16 + d \leq 15.$$

Význam formule ψ je následující:

$$
\begin{aligned}
[\![\psi]\!]_D &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot n + ((5+2)+2) \leq 15\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 \leq 15\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 6\} \\
&= \{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Část druhá

Úloha 3, rozmezí hodnocení: $\langle 0,5\rangle$ Nalezněte alespoň tříprvkový model množiny sentencí

$$\{\forall x \neg(f(x)=x),\ \forall x R(x,f(x)),\ \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x))\}.$$

U každé sentence pečlivě popište, proč je ve vaší interpretaci pravdivá.

Úloha 4, rozmezí hodnocení: $\langle 0,5\rangle$ Přirozenou dedukcí dokažte následující:

$$\forall x(P(x) \Rightarrow S(x)),\ \forall x(Q(x) \Rightarrow S(x)) \vdash (\exists y(P(y) \vee Q(y))) \Rightarrow (\exists z S(z))$$

Řešení. Zkonstruujeme interpretaci I. Uvažujme tříprvkové universum

$$U = \{a,b,c\},$$

nechť

$$[\![R]\!] = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$$

a nechť

$$\begin{aligned} [\![f]\!] : U &\to U \\ a &\mapsto b \\ b &\mapsto c \\ c &\mapsto a. \end{aligned}$$

Pak zjevně $[\![f]\!](a) \neq a$, $[\![f]\!](b) \neq b$ a $[\![f]\!](c) \neq c$, tedy $I \vDash \forall x \neg(f(x)=x)$. Také platí $(a,[\![f]\!](a)) \in [\![R]\!]$, $(b,[\![f]\!](b)) \in [\![R]\!]$ a $(c,[\![f]\!](c)) \in [\![R]\!]$, a proto $I \vDash \forall x R(x,f(x))$. Formule $\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x))$ je v I pravdivá, neboť $(a,b) \in [\![R]\!]$, ale $(b,a) \notin [\![R]\!]$, $(b,c) \in [\![R]\!]$, ale $(c,b) \notin [\![R]\!]$, a $(c,a) \in [\![R]\!]$, ale $(a,c) \notin [\![R]\!]$.

Důkaz přirozenou dedukcí je vypracován v doplňujícím souboru.