Příklady k procvičení přirozené dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad\varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}\ \mathrm{i}\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\ \mathrm{e}\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\ \mathrm{i}\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0: & \varphi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}\ \mathrm{e}\exists x$

	Zavedení	Eliminace	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}\ \mathrm{i}{=}$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}\ \mathrm{e}{=}$	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\ \mathrm{sym}{=}$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\ \mathrm{trans}{=}$

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termech se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

1 Obecný kvantifikátor

1.1 Unární predikáty

1. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$
2. $\vdash \forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$
3. $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$
4. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \wedge Q(z))$
5. $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$
6. $\forall z (P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y P(y) \wedge \forall y Q(y)$
7. $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x \neg P(x)$
8. $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \vee Q(z))$
9. $\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x (P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$
10. $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x (Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$
11. $\forall x (P(x) \vee Q(x)),\ \neg \forall x P(x) \vdash \neg \forall x \neg Q(x)$
12. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$

1.2 Binární predikáty

1. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$
2. $\forall x \neg \forall y R(x, y) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(x, y)$
3. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$
4. $\forall x \neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$
5. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x, z) \wedge R(z, y)))$
6. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x (R(x, x) \wedge \forall y R(y, x))$
7. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x))$

2 Existenční kvantifikátor

2.1 Unární predikáty

1. $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$
2. $\neg \exists x P(x) \vdash_{\{z_0\}} \exists x \neg P(x)$
3. $\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists y Q(y)$
4. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$
5. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$
6. $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z (P(z) \vee Q(z))$
7. $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$ (Můžete použít LEM.)

2.2 Binární predikáty

1. $\vdash_{\{z\}} \exists x \exists y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
2. $\exists x \exists y R(x, y) \vdash \exists x \exists y R(y, x)$
3. $\exists x R(x, x) \vdash \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$
4. $\neg \exists x \exists y R(x, y) \vdash \neg \exists y R(y, y)$
5. $\vdash \neg \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$
6. $\vdash_{\{z\}} \exists x R(x, x) \vee \exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$ (Můžete použít LEM.)
7. $R(a, b) \wedge R(b, c),\ \neg Q(a),\ Q(c) \vdash \exists x \exists y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x, y))$ (Můžete použít LEM.)

2.3 Smíšené úlohy

1. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$
2. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$
3. $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$
4. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$
5. $\forall x (\exists y P(y) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x \exists y (P(y) \Rightarrow Q(x))$

6. $\forall x \neg \forall y (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)) \vdash \forall x \exists y P(x,y)$
7. $\forall x (P(x,x) \vee \forall y Q(x,y)) \vdash \forall x (\exists y P(x,y) \vee Q(x,x))$
8. $\exists x (P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y)) \vdash \exists x (\exists y P(x,y) \wedge Q(x,x))$
9. $\vdash \forall x \exists y R(x,y) \vee \neg \forall x R(x,x)$
10. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \neg \exists x R(x,x),\ \exists x \forall y R(y,x) \vdash \forall x \neg R(x,x)$
11. $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y R(y,x)) \vdash \exists z R(z,a) \vee \neg \forall x P(x)$

3 Rovnost

1. $a = b,\ \neg(b = b \wedge b = c) \vdash \neg(a = c)$
2. $\vdash a = b \Leftrightarrow \forall x (x = a \Rightarrow x = b)$
3. $\exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y (x = y)$
4. $P(a),\ \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$
5. $P(b) \wedge Q(b),\ \forall x (P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$
6. $\forall x ((x = a) \vee (x = b)),\ \exists x P(x) \vdash (\neg P(a)) \Rightarrow P(b)$
7. $\forall x \forall y ((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg (P(z) \wedge Q(z))$
8. $\forall x \forall y (R(x,y) \Leftrightarrow x = y) \vdash \forall x R(x,x)$
9. $\forall x \neg R(x,x),\ R(a,b) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$
10. $\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y R(x,y)$
11. $\vdash \forall x P(x,x) \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x,y) \Rightarrow \neg(x = y))$
12. $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y)),\ \forall x \neg R(x,x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$

Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*