

# Příklady k procvičení přirozené dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}{\forall x \varphi} \text{ i}\forall x$	$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \text{ e}\forall x$
$\exists x$	$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \text{ i}\exists x$	$\frac{\exists x \varphi}{\begin{array}{c} x_0 : \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \text{ e}\exists x$

	Zavedení $\frac{}{t = t} \text{ i} =$	Eliminace $\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} \text{ e} =$	Symetrie $\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1} \text{ sym} =$	Transitivita $\frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3} \text{ trans} =$
--	--	--	---	---

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termeh se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

# 1 Obecný kvantifikátor

## 1.1 Unární predikáty

1.  $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

1.  $\forall x P(x)$  1
2. 

$x_0$	D
-------	---
3. 

$P(x_0)$	$e\forall x, 1$
----------	-----------------
4.  $\forall y P(y)$   $i\forall x, 2-3$

2.  $\vdash \forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$

1. 

$x_0$	D
-------	---
2. 

$P(x_0)$	P
----------	---
3. 

$P(x_0) \Rightarrow P(x_0)$	$i\Rightarrow, 2-2$
-----------------------------	---------------------
4.  $\forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$   $i\forall x, 1-3$

3.  $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1.  $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x))$  P
2. 

$P(a)$	P
--------	---
3. 

$z_0$	D
-------	---
4. 

$P(a) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
---------------------------	-----------------
5. 

$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 2, 4$
----------	----------------------
6. 

$\forall z Q(z)$	$i\forall x, 3-5$
------------------	-------------------
7.  $P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$   $i\Rightarrow, 2-6$

4.  $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \wedge Q(z))$

1.  $\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)$  P
2.  $\forall xP(x)$   $e\wedge_1, 1$
3.  $\forall yQ(y)$   $e\wedge_2, 1$
4. 

$z_0$	D
$P(z_0)$	$e\forall x, 2$
$Q(z_0)$	$e\forall y, 3$
$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	$i\wedge, 6, 7$
5.  $P(z_0)$   $e\forall x, 2$
6.  $Q(z_0)$   $e\forall y, 3$
7.  $P(z_0) \wedge Q(z_0)$   $i\wedge, 6, 7$
8.  $\forall z(P(z) \wedge Q(z))$   $i\forall z, 5-8$

5.  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall yP(y) \Rightarrow \forall zQ(z)$

1.  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$  P
2. 

$\forall yP(y)$	P
$z_0$	D
$P(z_0)$	$e\forall y, 3$
$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
$\forall zQ(z)$	$i\forall z, 3-6$
3. 

$z_0$	D
$P(z_0)$	$e\forall y, 3$
$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
4.  $P(z_0)$   $e\forall y, 3$
5.  $P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$   $e\forall x, 1$
6.  $Q(z_0)$   $e\Rightarrow, 4, 5$
7.  $\forall zQ(z)$   $i\forall z, 3-6$
8.  $\forall yP(y) \Rightarrow \forall zQ(z)$   $i\Rightarrow, 2-7$

6.  $\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall yP(y) \wedge \forall yQ(y)$

1.  $\forall z(P(z) \wedge Q(z))$  P
2. 

$y_0$	D
$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall z, 1$
$P(y_0)$	$e\wedge_1, 3$
3.  $P(y_0) \wedge Q(y_0)$   $e\forall z, 1$
4.  $P(y_0)$   $e\wedge_1, 3$
5.  $\forall yP(y)$   $i\forall y, 2-4$
6. 

$y_0$	D
$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall z, 1$
$Q(y_0)$	$e\wedge_2, 7$
7.  $P(y_0) \wedge Q(y_0)$   $e\forall z, 1$
8.  $Q(y_0)$   $e\wedge_2, 7$
9.  $\forall yQ(y)$   $i\forall y, 6-8$
10.  $\forall yP(y) \wedge \forall yQ(y)$   $i\wedge, 5, 9$

7.  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x\neg Q(x) \vdash \forall x\neg P(x)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x\neg Q(x)$	P
3.	$x_0$	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
7.	$\neg Q(x_0)$	$e\forall x, 2$
8.	$\perp$	$e\neg, 6, 7$
9.	$\neg P(x_0)$	$i\neg, 4-8$
10.	$\forall x\neg P(x)$	$i\forall x, 3-9$

8.  $\forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \vdash \forall z(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\forall xP(x) \vee \forall yQ(y)$	P
2.	$z_0$	D
3.	$\forall xP(x)$	P
4.	$P(z_0)$	$e\forall x, 3$
5.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_1, 4$
6.	$\forall yQ(y)$	P
7.	$Q(z_0)$	$e\forall y, 6$
8.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_2, 7$
9.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$e\vee, 1, 3-5, 6-8$
10.	$\forall z(P(z) \vee Q(z))$	$i\forall z, 3-9$

9.  $\forall x\forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow \forall zQ(z))$

1.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$	P
2.	$x_0$	D
3.	$P(x_0)$	P
4.	$z_0$	D
5.	$\forall y (P(x_0) \Rightarrow Q(y))$	$e\forall x, 1$
6.	$P(x_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall y, 5$
7.	$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 3, 6$
8.	$\forall z Q(z)$	$i\forall z, 4-7$
9.	$P(x_0) \Rightarrow \forall z Q(z)$	$i\Rightarrow, 4-8$
10.	$\forall x (P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$	$i\forall x, 3-9$

10.  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x (Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$

1.	$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x))$	P
3.	$x_0$	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
7.	$Q(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	$e\forall x, 2$
8.	$R(x_0)$	$e\Rightarrow, 6, 7$
9.	$P(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	$i\Rightarrow, 4-8$
10.	$\forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$	$i\forall x, 4-9$

11.  $\forall x (P(x) \vee Q(x)), \neg \forall x P(x) \vdash \neg \forall x \neg Q(x)$

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
2.	$\neg \forall x P(x)$	P
3.	$\forall x \neg Q(x)$	P
4.	$x_0$	D
5.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$\neg Q(x_0)$	$e\forall x, 3$
7.	$P(x_0)$	P
8.	$Q(x_0)$	P
9.	$\perp$	$e\neg, 8, 3$
10.	$P(x_0)$	$e\perp, 9$
11.	$P(x_0)$	$e\vee, 5, 7-7, 8-10$
12.	$\forall x P(x)$	$i\forall x, 4-11$
13.	$\perp$	$e\neg, 12, 2$
14.	$\neg \forall x \neg Q(x)$	$i\neg, 3-13$

12.  $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$x_0$	D
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
4.	$P(x_0)$	$e\wedge_1, 3$
5.	$y_0$	D
6.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall x, 1$
7.	$Q(y_0)$	$e\wedge_2, 6$
8.	$P(x_0) \wedge Q(y_0)$	$i\wedge, 4, 7$
9.	$\forall y(P(x_0) \wedge Q(y))$	$i\forall y, 5-8$
10.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$	$i\forall x, 2-9$

## 1.2 Binární predikáty

1.  $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$

1.	$\forall x \forall y R(x, y)$	P
2.	$x_0$	D
3.	$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 1$
4.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall y, 3$
5.	$\forall x R(x, x)$	$i\forall x, 2-4$

- $\forall x \neg \forall y R(x, y) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(x, y)$
- $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$
- $\forall x \neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$
- vynecháno
- $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x, z) \wedge R(z, y)))$
- $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x (R(x, x) \wedge \forall y R(y, x))$
- $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x))$

1.	$\forall x \forall y R(x, y)$	P
2.	$x_0$	D
3.	$y_0$	D
4.	$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 1$
5.	$R(x_0, y_0)$	$e\forall y, 4$
6.	$\forall y R(y_0, y)$	$e\forall x, 1$
7.	$R(y_0, x_0)$	$e\forall y, 6$
8.	$R(x_0, y_0) \wedge R(y_0, x_0)$	$i\wedge, 5, 7$
9.	$\forall y (R(x_0, y) \wedge R(y, x_0))$	$i\forall y, 3-8$
10.	$\forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x))$	$i\forall x, 2-9$

## 2 Existenční kvantifikátor

### 2.1 Unární predikáty

- $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$

1.  $\exists xP(x)$  P
2. 

$x_0 : P(x_0)$	W
----------------	---
3. 

$\exists yP(y)$	$i\exists y, 2$
-----------------	-----------------
4.  $\exists yP(y)$   $e\exists y, 1, 2-3$

2.  $\neg\exists xP(x) \vdash_{\{z_0\}} \exists x\neg P(x)$

3.  $\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists yQ(y)$

4.  $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists yP(y) \wedge \exists zQ(z)$

1.  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$  P
2. 

$x_0 : P(x_0) \wedge Q(x_0)$	W
------------------------------	---
3.  $P(x_0)$   $e\wedge_1, 2$
4.  $Q(x_0)$   $e\wedge_2, 2$
5.  $\exists yP(y)$   $i\exists y, 2$
6.  $\exists zQ(z)$   $i\exists z, 3$
7. 

$\exists yP(y) \wedge \exists zQ(z)$	$i\wedge, 4, 5$
--------------------------------------	-----------------
8.  $\exists yP(y) \wedge \exists zQ(z)$   $e\exists x, 1, 2-7$

5.  $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists yP(y) \vee \exists zQ(z)$

6.  $\exists xP(x) \vee \exists yQ(y) \vdash \exists z(P(z) \vee Q(z))$

1.  $\exists xP(x) \vee \exists yQ(y)$  P
2. 

$\exists xP(x)$	P
-----------------	---
3. 

$z_0 : P(z_0)$	W
----------------	---
4.  $P(z_0) \vee Q(z_0)$   $i\vee_1, 3$
5. 

$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	$i\exists z, 4$
-----------------------------	-----------------
6.  $\exists z(P(z) \vee Q(z))$   $e\exists x, 2, 3-5$
7. 

$\exists yQ(y)$	P
-----------------	---
8. 

$z_1 : Q(z_1)$	W
----------------	---
9.  $P(z_1) \vee Q(z_1)$   $i\vee_2, 8$
10. 

$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	$i\exists z, 9$
-----------------------------	-----------------
11.  $\exists z(P(z) \vee Q(z))$   $e\exists y, 7, 8-10$
12.  $\exists z(P(z) \vee Q(z))$   $e\vee, 1, 2-6, 7-11$



7.  $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$  (Můžete použít LEM.)

1.	$P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)$	P
2.	$P(a) \vee \neg P(a)$	LEM
3.	$P(a)$	P
4.	$\exists x Q(x)$	$e\Rightarrow, 3, 1$
5.	$x_0 : Q(x_0)$	W
6.	$P(a)$	P
7.	$Q(x_0)$	it, 5
8.	$P(a) \Rightarrow Q(x_0)$	$i\Rightarrow, 6-7$
9.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$i\exists x, 8$
10.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$e\exists x, 4, 5-9$
11.	$\neg P(a)$	P
12.	$P(a)$	P
13.	$\perp$	$e\neg, 12, 11$
14.	$Q(x)$	$e\perp, 13$
15.	$P(a) \Rightarrow Q(x)$	$i\Rightarrow, 12-14$
16.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$i\exists x, 15$
17.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$e\vee, 2, 3-10, 11-16$

## 2.2 Binární predikáty

1.  $\vdash_{\{z\}} \exists x \exists y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$

2.  $\exists x \exists y R(x, y) \vdash \exists x \exists y R(y, x)$

3.  $\exists x R(x, x) \vdash \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$

4.  $\neg \exists x \exists y R(x, y) \vdash \neg \exists y R(y, y)$

5.  $\vdash \neg \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$

1.	$\exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$	P
2.	$x_0 : \exists y (R(x_0, y) \wedge \neg R(x_0, y))$	W
3.	$y_0 : R(x_0, y_0) \wedge \neg R(x_0, y_0)$	W
4.	$R(x_0, y_0)$	$e \wedge_1, 3$
5.	$\neg R(x_0, y_0)$	$e \wedge_2, 4$
6.	$\perp$	$e \neg, 4, 5$
7.	$\perp$	$e \exists y, 2, 3-6$
8.	$\perp$	$e \exists x, 1, 2-7$
9.	$\neg \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$	$i \neg, 1-8$

6.  $\vdash_{\{z\}} \exists x R(x, x) \vee \exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$  (Můžete použít LEM.)

7.  $R(a, b) \wedge R(b, c), \neg Q(a), Q(c) \vdash \exists x \exists y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x, y))$  (Můžete použít LEM.)

### 2.3 Smíšené úlohy

1.  $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\neg \exists x P(x)$	P
2.	$x$	D
3.	$P(x)$	P
4.	$\exists x P(x)$	$i \exists x, 3$
5.	$\perp$	$e \neg, 4, 1$
6.	$\neg P(x)$	$i \neg, 3-5$
7.	$\forall x \neg P(x)$	$i \forall x, 3-6$

2.  $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

1.	$\exists x \neg P(x)$	P
2.	$\forall x P(x)$	P
3.	$x_0 : \neg P(x_0)$	W
4.	$P(x_0)$	$e \forall x, 2$
5.	$\perp$	$e \neg, 4, 3$
6.	$\perp$	$e \exists x, 1, 3-5$
7.	$\neg \forall x P(x)$	$i \neg, 2-6$

3.  $\neg\forall xP(x) \vdash \exists x\neg P(x)$

1.	$\neg\forall xP(x)$	D
2.	$\neg\exists x\neg P(x)$	P
3.	$x_0$	D
4.	$\neg P(x_0)$	P
5.	$\exists x\neg P(x)$	$i\exists x, 4$
6.	$\perp$	$e\neg, 5, 2$
7.	$\neg\neg P(x_0)$	$i\neg, 4-6$
8.	$P(x_0)$	$e\neg\neg, 7$
9.	$\forall xP(x)$	$i\forall x, 3-8$
10.	$\perp$	$e\neg, 9, 1$
11.	$\neg\neg\exists x\neg P(x)$	$i\neg, 2-10$
12.	$\exists x\neg P(x)$	$e\neg\neg, 11$

4.  $\forall x\neg P(x) \vdash \neg\exists xP(x)$

1.	$\forall x\neg P(x)$	P
2.	$\exists xP(x)$	P
3.	$x_0 : P(x_0)$	W
4.	$\neg P(x_0)$	$e\forall x, 1$
5.	$\perp$	$e\neg, 3, 4$
6.	$\perp$	$e\exists x, 2, 3-5$
7.	$\neg\exists xP(x)$	$i\neg, 2-6$

5.  $\forall x(\exists yP(y) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x\exists y(P(y) \Rightarrow Q(x))$

1.	$\forall x(\exists yP(y) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$x_0$	D
3.	$\exists yP(y) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
4.	$P(x_0) \vee \neg P(x_0)$	LEM
5.	$P(x_0)$	P
6.	$\exists yP(y)$	$i\exists y, 5$
7.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow, 6, 3$
8.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$i\Rightarrow$
9.		

6.  $\forall x \neg \forall y (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \vdash \forall x \exists y P(x, y)$
7.  $\forall x (P(x, x) \vee \forall y Q(x, y)) \vdash \forall x (\exists y P(x, y) \vee Q(x, x))$
8.  $\exists x (P(x, x) \wedge \forall y Q(x, y)) \vdash \exists x (\exists y P(x, y) \wedge Q(x, x))$
9.  $\vdash \forall x \exists y R(x, y) \vee \neg \forall x R(x, x)$

1.	$\forall x R(x, x) \vee \neg \forall x R(x, x)$	LEM
2.	$\forall x R(x, x)$	P
3.	$x_0$	D
4.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall x, 2$
5.	$\exists y R(x_0, y)$	$i\exists y, 4$
6.	$\forall x \exists y R(x, y)$	$i\forall x, 3-5$
7.	$\forall x \exists y R(x, y) \vee \neg \forall x R(x, x)$	$i\vee_1, 6$
8.	$\neg \forall x R(x, x)$	P
9.	$\forall x \exists y R(x, y) \vee \neg \forall x R(x, x)$	$i\vee_2, 8$
10.	$\forall x \exists y R(x, y) \vee \neg \forall x R(x, x)$	$e\vee, 1, 2-7, 8-9$

10.  $\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \neg \exists x R(x, x), \exists x \forall y R(y, x) \vdash \forall x \neg R(x, x)$
11.  $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y R(y, x)) \vdash \exists z R(z, a) \vee \neg \forall x P(x)$
12.  $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \vee R(z, y)) \vee R(z, x)) \vdash_{\{w_0\}} \exists x \exists y \forall z (R(z, x) \vee R(z, y))$

### 3 Rovnost

1.  $a = b, \neg(b = b \wedge b = c) \vdash \neg(a = c)$

1.	$a = b$	P
2.	$\neg(b = b \wedge b = c)$	P
3.	$a = c$	P
4.	$b = c$	$e=, 1, 3$
5.	$b = b$	$i=$
6.	$b = b \wedge b = c$	$i\wedge, 5, 4$
7.	$\perp$	$e\neg, 6, 2$
8.	$\neg(a = c)$	$i\neg, 3-7$

2.  $\vdash a = b \Leftrightarrow \forall x(x = a \Rightarrow x = b)$

3.  $\exists x\forall y(x = y) \vdash \forall x\forall y(x = y)$

4.  $P(a), \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$

1.	$P(a)$	$P$
2.	$\neg P(b)$	$P$
3.	$a = b$	$P$
4.	$P(b)$	$e=, 3, 1$
5.	$\perp$	$e\neg, 4, 2$
6.	$\neg(a = b)$	$i\neg, 3-5$

5.  $P(b) \wedge Q(b), \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$

1.	$P(b) \wedge Q(b)$	$P$
2.	$\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$	$P$
3.	$P(b) \Rightarrow b = a$	$e\forall x, 2$
4.	$P(b)$	$e\wedge_1, 1$
5.	$b = a$	$e\Rightarrow, 4, 3$
6.	$Q(b)$	$e\wedge_2, 1$
7.	$Q(a)$	$e=, 5, 6$

6.  $\forall x((x = a) \vee (x = b)), \exists xP(x) \vdash (\neg P(a)) \Rightarrow P(b)$

7.  $\forall x\forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z\neg(P(z) \wedge Q(z))$

8.  $\forall x\forall y(R(x, y) \Leftrightarrow x = y) \vdash \forall xR(x, x)$

9.  $\forall x\neg R(x, x), R(a, b) \vdash \exists x\exists y\neg(x = y)$

10.  $\exists x\exists yR(x, y), \exists x\forall y(x = y) \vdash \forall x\forall yR(x, y)$

11.  $\vdash \forall xP(x, x) \Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg P(x, y) \Rightarrow \neg(x = y))$

12.  $\forall x\exists y(R(x, y) \wedge P(y)), \forall x\neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg\forall x\forall y(P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$

1.	$z_0$	D
2.	$\forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(y))$	P
3.	$\forall x \neg R(x, x)$	P
4.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	P
5.	$\exists y (R(z_0, y) \wedge P(y))$	$e\forall x, 2$
6.	$y_0 : R(z_0, y_0) \wedge P(y_0)$	W
7.	$\exists y (R(y_0, y) \wedge P(y))$	$e\forall x, 2$
8.	$x_0 : R(y_0, x_0) \wedge P(x_0)$	W
9.	$P(y_0)$	$e\wedge_2, 6$
10.	$P(x_0)$	$e\wedge_2, 8$
11.	$\forall y (P(y_0) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (y_0 = y)))$	$e\forall x, 4$
12.	$P(y_0) \Rightarrow (P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0))$	$e\forall y, 11$
13.	$P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0)$	$e\Rightarrow, 9, 12$
14.	$y_0 = x_0$	$e\Rightarrow, 10, 13$
15.	$R(y_0, x_0)$	$e\wedge_1, 8$
16.	$R(y_0, y_0)$	$e=, 14, 15$
17.	$\neg R(y_0, y_0)$	$e\forall x, 3$
18.	$\perp$	$e\neg, 16, 17$
19.	$\perp$	$e\exists y, 7, 8-18$
20.	$\perp$	$e\exists y, 5, 6-19$
21.	$\neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	$i\neg, 4-20$
22.		

## Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*