

Příklady k procvičení přirozené dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}{\forall x \varphi} \text{ i}\forall x$	$\frac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]} \text{ e}\forall x$
$\exists x$	$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi} \text{ i}\exists x$	$\frac{\exists x \varphi}{\begin{array}{c} x_0 : \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \text{ e}\exists x$

	Zavedení $\frac{}{t = t} \text{ i} =$	Eliminace $\frac{t_1 = t_2 \quad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} \text{ e} =$	Symetrie $\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1} \text{ sym} =$	Transitivita $\frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3} \text{ trans} =$
--	--	--	---	---

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termech se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

1 Obecný kvantifikátor

1.1 Unární predikáty

1. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

1. $\forall x P(x)$ 1
2.

x_0	D
-------	---
3.

$P(x_0)$	$e\forall x, 1$
----------	-----------------
4. $\forall y P(y)$ $i\forall y, 2-3$

2. $\vdash \forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$

1.

x_0	D
-------	---
2.

$P(x_0)$	P
----------	---
3.

$P(x_0) \Rightarrow P(x_0)$	$i\Rightarrow, 2-2$
-----------------------------	---------------------
4. $\forall x (P(x) \Rightarrow P(x))$ $i\forall x, 1-3$

3. $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1. $\forall x (P(a) \Rightarrow Q(x))$ P
2.

$P(a)$	P
--------	---
3.

z_0	D
-------	---
4.

$P(a) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
---------------------------	-----------------
5.

$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 2, 4$
----------	----------------------
6.

$\forall z Q(z)$	$i\forall z, 3-5$
------------------	-------------------
7. $P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$ $i\Rightarrow, 2-6$

4. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z (P(z) \wedge Q(z))$

1. $\forall xP(x) \wedge \forall yQ(y)$ P
2. $\forall xP(x)$ $e\wedge_1, 1$
3. $\forall yQ(y)$ $e\wedge_2, 1$
4.

z_0	D
$P(z_0)$	$e\forall x, 2$
$Q(z_0)$	$e\forall y, 3$
$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	$i\wedge, 6, 7$
5. $P(z_0)$ $e\forall x, 2$
6. $Q(z_0)$ $e\forall y, 3$
7. $P(z_0) \wedge Q(z_0)$ $i\wedge, 6, 7$
8. $\forall z(P(z) \wedge Q(z))$ $i\forall z, 5-8$

5. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall yP(y) \Rightarrow \forall zQ(z)$

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ P
2.

$\forall yP(y)$	P
z_0	D
$P(z_0)$	$e\forall y, 3$
$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
$\forall zQ(z)$	$i\forall z, 3-6$
3.

z_0	D
$P(z_0)$	$e\forall y, 3$
$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall x, 1$
$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
4. $P(z_0)$ $e\forall y, 3$
5. $P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$ $e\forall x, 1$
6. $Q(z_0)$ $e\Rightarrow, 4, 5$
7. $\forall zQ(z)$ $i\forall z, 3-6$
8. $\forall yP(y) \Rightarrow \forall zQ(z)$ $i\Rightarrow, 2-7$

6. $\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall yP(y) \wedge \forall yQ(y)$

1. $\forall z(P(z) \wedge Q(z))$ P
2.

y_0	D
$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall z, 1$
$P(y_0)$	$e\wedge_1, 3$
3. $P(y_0) \wedge Q(y_0)$ $e\forall z, 1$
4. $P(y_0)$ $e\wedge_1, 3$
5. $\forall yP(y)$ $i\forall y, 2-4$
6.

y_0	D
$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall z, 1$
$Q(y_0)$	$e\wedge_2, 7$
7. $P(y_0) \wedge Q(y_0)$ $e\forall z, 1$
8. $Q(y_0)$ $e\wedge_2, 7$
9. $\forall yQ(y)$ $i\forall y, 6-8$
10. $\forall yP(y) \wedge \forall yQ(y)$ $i\wedge, 5, 9$

7. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x\neg Q(x) \vdash \forall x\neg P(x)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x\neg Q(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
7.	$\neg Q(x_0)$	$e\forall x, 2$
8.	\perp	$e\neg, 6, 7$
9.	$\neg P(x_0)$	$i\neg, 4-8$
10.	$\forall x\neg P(x)$	$i\forall x, 3-9$

8. $\forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \vdash \forall z(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\forall xP(x) \vee \forall yQ(y)$	P
2.	z_0	D
3.	$\forall xP(x)$	P
4.	$P(z_0)$	$e\forall x, 3$
5.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_1, 4$
6.	$\forall yQ(y)$	P
7.	$Q(z_0)$	$e\forall y, 6$
8.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_2, 7$
9.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$e\vee, 1, 3-5, 6-8$
10.	$\forall z(P(z) \vee Q(z))$	$i\forall z, 3-9$

9. $\forall x\forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow \forall zQ(z))$

1.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0)$	P
4.	z_0	D
5.	$\forall y (P(x_0) \Rightarrow Q(y))$	$e\forall x, 1$
6.	$P(x_0) \Rightarrow Q(z_0)$	$e\forall y, 5$
7.	$Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 3, 6$
8.	$\forall z Q(z)$	$i\forall z, 4-7$
9.	$P(x_0) \Rightarrow \forall z Q(z)$	$i\Rightarrow, 4-8$
10.	$\forall x (P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$	$i\forall x, 3-9$

10. $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x (Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$

1.	$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x))$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow, 4, 5$
7.	$Q(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	$e\forall x, 2$
8.	$R(x_0)$	$e\Rightarrow, 6, 7$
9.	$P(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	$i\Rightarrow, 4-8$
10.	$\forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$	$i\forall x, 4-9$

11. $\forall x (P(x) \vee Q(x)), \neg \forall x P(x) \vdash \neg \forall x \neg Q(x)$

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
2.	$\neg \forall x P(x)$	P
3.	$\forall x \neg Q(x)$	P
4.	x_0	D
5.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
6.	$\neg Q(x_0)$	$e\forall x, 3$
7.	$P(x_0)$	P
8.	$Q(x_0)$	P
9.	\perp	$e\neg, 8, 3$
10.	$P(x_0)$	$e\perp, 9$
11.	$P(x_0)$	$e\vee, 5, 7-7, 8-10$
12.	$\forall x P(x)$	$i\forall x, 4-11$
13.	\perp	$e\neg, 12, 2$
14.	$\neg \forall x \neg Q(x)$	$i\neg, 3-13$

12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
4.	$P(x_0)$	$e\wedge_1, 3$
5.	y_0	D
6.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	$e\forall x, 1$
7.	$Q(y_0)$	$e\wedge_2, 6$
8.	$P(x_0) \wedge Q(y_0)$	$i\wedge, 4, 7$
9.	$\forall y(P(x_0) \wedge Q(y))$	$i\forall y, 5-8$
10.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$	$i\forall x, 2-9$

1.2 Binární predikáty

1. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$

1. $\forall x \forall y R(x, y)$ P
2.

x_0	D
-------	---
3.

$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 1$
-----------------------	-----------------
4.

$R(x_0, x_0)$	$e\forall y, 3$
---------------	-----------------
5. $\forall x R(x, x)$ $i\forall x, 2-4$

2. $\forall x \neg \forall y R(x, y) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(x, y)$

1.

z_0	D
-------	---
2. $\forall x \neg \forall y R(x, y)$ P
3.

$\forall x \forall y R(x, y)$	P
-------------------------------	---
4.

$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 3$
-----------------------	-----------------
5.

$\neg \forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 2$
----------------------------	-----------------
6.

\perp	$e\neg, 4, 5$
---------	---------------
7. $\neg \forall x \forall y R(x, y)$ $i\neg, 3-6$
- 8.

3. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$

1. $\forall x R(x, x)$ P
2.

x_0	D
-------	---
3.

$\forall y \neg R(x_0, y)$	P
----------------------------	---
4.

$R(x_0, x_0)$	$e\forall x, 1$
---------------	-----------------
5.

$\neg R(x_0, x_0)$	$e\forall y, 3$
--------------------	-----------------
6.

\perp	$e\neg, 4, 5$
---------	---------------
7. $\neg \forall y \neg R(x_0, y)$ $i\neg, 3-6$
8. $\forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$ $i\forall x, 2-7$

4. $\forall x \neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$

1.	z_0	D
2.	$\forall x \neg R(x, x)$	P
3.	$\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$	P
4.	$\neg R(z_0, z_0)$	$e\forall x, 2$
5.	$\forall y (R(x_0, y) \vee R(y, x_0))$	$e\forall x, 3$
6.	$R(x_0, x_0) \vee R(x_0, x_0)$	$e\forall y, 5$
7.	$R(x_0, x_0)$	P
8.	\perp	$e\neg, 7, 4$
9.	$R(x_0, x_0)$	P
10.	\perp	$e\neg, 9, 4$
11.	\perp	$e\vee, 6, 7-8, 9-10$
12.	$\neg \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$	$i\neg, 3-11$
13.		

5. vynecháno

6. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x, z) \wedge R(z, y)))$

1.	$\forall x R(x, x)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$R(x_0, y_0)$	P
5.	$\forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y_0))$	P
6.	$\neg (R(x_0, x_0) \wedge R(x_0, y_0))$	$e\forall z, 5$
7.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall x, 1$
8.	$R(x_0, x_0) \wedge R(x_0, y_0)$	$i\wedge, 7, 4$
9.	\perp	$e\neg, 8, 5$
10.	$\neg \forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y_0))$	$i\neg, 5-9$
11.	$R(x_0, y_0) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y_0))$	
12.	$\forall y (R(x_0, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x_0, z) \wedge R(z, y)))$	
13.	$\forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x, z) \wedge R(z, y)))$	

7. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x (R(x, x) \wedge \forall y R(y, x))$

1.	$\forall x \forall y R(x, y)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 1$
4.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall y, 3$
5.	y_0	D
6.	$\forall y R(y_0, y)$	$e\forall x, 1$
7.	$R(y_0, x_0)$	$e\forall y, 6$
8.		
9.	$\forall y R(y, x_0)$	$i\forall y, 5-7$
10.	$R(x_0, x_0) \wedge \forall y R(y, x_0)$	$i\wedge, 4, 8$
11.	$\forall x (R(x, x) \wedge \forall y R(y, x))$	$i\forall x, 2-9$

8. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x))$

1.	$\forall x \forall y R(x, y)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$\forall y R(x_0, y)$	$e\forall x, 1$
5.	$R(x_0, y_0)$	$e\forall y, 4$
6.	$\forall y R(y_0, y)$	$e\forall x, 1$
7.	$R(y_0, x_0)$	$e\forall y, 6$
8.	$R(x_0, y_0) \wedge R(y_0, x_0)$	$i\wedge, 5, 7$
9.	$\forall y (R(x_0, y) \wedge R(y, x_0))$	$i\forall y, 3-8$
10.	$\forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x))$	$i\forall x, 2-9$

2 Existenční kvantifikátor

2.1 Unární predikáty

1. $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$

1.	$\exists x P(x)$	P
2.	$x_0 : P(x_0)$	W
3.	$\exists y P(y)$	$i\exists y, 2$
4.	$\exists y P(y)$	$e\exists y, 1, 2-3$

2. $\neg\exists xP(x) \vdash_{\{z_0\}} \exists x\neg P(x)$

1.	z_0	D
2.	$\neg\exists xP(x)$	P
3.	$P(z_0)$	P
4.	$\exists xP(x)$	$i\exists x, 3$
5.	\perp	$e\neg, 3, 2$
6.	$\neg P(z_0)$	$i\neg, 3-5$
7.	$\exists x\neg P(x)$	$i\exists x, 6$
8.		

3. $\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists yQ(y)$

1.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$P(a)$	P
3.	$x_0 : P(a) \Rightarrow Q(x_0)$	
4.		
5.		

4. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists yP(y) \wedge \exists zQ(z)$

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \wedge Q(x_0)$	W
3.	$P(x_0)$	$e\wedge_1, 2$
4.	$Q(x_0)$	$e\wedge_2, 2$
5.	$\exists yP(y)$	$i\exists y, 2$
6.	$\exists zQ(z)$	$i\exists z, 3$
7.	$\exists yP(y) \wedge \exists zQ(z)$	$i\wedge, 4, 5$
8.	$\exists yP(y) \wedge \exists zQ(z)$	$e\exists x, 1, 2-7$

5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists yP(y) \vee \exists zQ(z)$

1.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \vee Q(x_0)$	W
3.	$P(x_0)$	P
4.	$\exists y P(y)$	$i\exists y$
5.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	$i\vee_{1, 4}$
6.	$Q(x_0)$	P
7.	$\exists z Q(z)$	$i\exists z$
8.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	$i\vee_{2, 8}$
9.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	$e\vee, 2, 3-6, 7-9$
10.	$\exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$	$e\exists x, 1, 2-10$

6. $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z (P(z) \vee Q(z))$

1.	$\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$z_0 : P(z_0)$	W
4.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	$i\vee_{1, 3}$
5.	$\exists z (P(z) \vee Q(z))$	$i\exists z, 4$
6.	$\exists z (P(z) \vee Q(z))$	$e\exists x, 2, 3-5$
7.	$\exists y Q(y)$	P
8.	$z_1 : Q(z_1)$	W
9.	$P(z_1) \vee Q(z_1)$	$i\vee_{2, 8}$
10.	$\exists z (P(z) \vee Q(z))$	$i\exists z, 9$
11.	$\exists z (P(z) \vee Q(z))$	$e\exists y, 7, 8-10$
12.	$\exists z (P(z) \vee Q(z))$	$e\vee, 1, 2-6, 7-11$

7. $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$ (Můžete použít LEM.)

1.	$P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)$	P
2.	$P(a) \vee \neg P(a)$	LEM
3.	$P(a)$	P
4.	$\exists x Q(x)$	$e\Rightarrow, 3, 1$
5.	$x_0 : Q(x_0)$	W
6.	$P(a)$	P
7.	$Q(x_0)$	it, 5
8.	$P(a) \Rightarrow Q(x_0)$	$i\Rightarrow, 6-7$
9.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$i\exists x, 8$
10.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$e\exists x, 4, 5-9$
11.	$\neg P(a)$	P
12.	$P(a)$	P
13.	\perp	$e\neg, 12, 11$
14.	$Q(x)$	$e\perp, 13$
15.	$P(a) \Rightarrow Q(x)$	$i\Rightarrow, 12-14$
16.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$i\exists x, 15$
17.	$\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x))$	$e\vee, 2, 3-10, 11-16$

2.2 Binární predikáty

1. $\vdash_{\{z\}} \exists x \exists y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$

1.	z	D
2.	$R(z, z)$	P
3.	$R(z, z) \Rightarrow R(z, z)$	$i\Rightarrow, 2-2$
4.	$\exists y (R(z, y) \Rightarrow R(y, z))$	$i\exists y, 3$
5.	$\exists x \exists y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$	$i\exists x, 4$
6.		

2. $\exists x \exists y R(x, y) \vdash \exists x \exists y R(y, x)$

1.	$\exists x \exists y R(x, y)$	P
2.	$a : \exists y R(a, y)$	W
3.	$b : R(a, b)$	W
4.	$\exists y R(y, b)$	$i \exists y, 3$
5.	$\exists x \exists y R(y, x)$	$i \exists x, 4$
6.	$\exists x \exists y R(y, x)$	$e \exists y, 2, 3-5$
7.	$\exists x \exists y R(y, x)$	$e \exists x, 1, 2-6$

3. $\exists x R(x, x) \vdash \exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$

1.	$\exists x R(x, x)$	P
2.	$x_0 : R(x_0, x_0)$	W
3.	$R(x_0, x_0) \wedge R(x_0, x_0)$	$i \wedge, 2, 2$
4.	$\exists y (R(x_0, y) \wedge R(y, x_0))$	$i \exists y, 3$
5.	$\exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$	$i \exists x, 4$
6.	$\exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$	$e \exists x, 1, 2-5$

4. $\neg \exists x \exists y R(x, y) \vdash \neg \exists y R(y, y)$

1.	$\neg \exists x \exists y R(x, y)$	P
2.	$\exists y R(y, y)$	P
3.	$R(a, a)$	W
4.	$\exists y R(a, y)$	$i \exists y, 3$
5.	$\exists x \exists y R(x, y)$	$i \exists x, 4$
6.	$\exists x \exists y R(x, y)$	$e \exists y, 2, 3-5$
7.	\perp	$e \neg, 6, 1$
8.	$\neg \exists y R(y, y)$	$i \neg, 2-7$

5. $\vdash \neg \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$

1.	$\exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$	P
2.	$x_0 : \exists y (R(x_0, y) \wedge \neg R(x_0, y))$	W
3.	$y_0 : R(x_0, y_0) \wedge \neg R(x_0, y_0)$	W
4.	$R(x_0, y_0)$	$e \wedge_1, 3$
5.	$\neg R(x_0, y_0)$	$e \wedge_2, 4$
6.	\perp	$e \neg, 4, 5$
7.	\perp	$e \exists y, 2, 3-6$
8.	\perp	$e \exists x, 1, 2-7$
9.	$\neg \exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg R(x, y))$	$i \neg, 1-8$

6. $\vdash_{\{z\}} \exists x R(x, x) \vee \exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$ (Můžete použít LEM.)

1.	z	D
2.	$R(z, z) \vee \neg R(z, z)$	LEM
3.	$R(z, z)$	D
4.	$\exists x R(x, x)$	$i \exists x, 3$
5.	$\exists x R(x, x) \vee \exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$	$i \vee_1, 4$
6.	$\neg R(z, z)$	P
7.	$R(z, z)$	P
8.	\perp	$e \neg, 7, 6$
9.	$\neg \exists y R(y, z)$	$e \perp, 8$
10.	$R(z, z) \Rightarrow \neg \exists y R(y, z)$	$i \Rightarrow, 7-9$
11.	$\exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$	$i \exists x, 10$
12.	$\exists x R(x, x) \vee \exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$	$i \vee_2, 12$
13.	$\exists x R(x, x) \vee \exists x (R(x, x) \Rightarrow \neg \exists y R(y, x))$	$e \vee, 2, 3-5, 6-12$
14.		

7. $R(a, b) \wedge R(b, c), \neg Q(a), Q(c) \vdash \exists x \exists y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x, y))$ (Můžete použít LEM.)

1.	$R(a, b) \wedge R(b, c)$	P
2.	$\neg Q(a)$	P
3.	$Q(c)$	P
4.	$Q(b) \vee \neg Q(b)$	LEM
5.	$Q(b)$	P
6.	$\neg Q(a) \wedge Q(b)$	$i\wedge, 2, 5$
7.	$R(a, b)$	$e\wedge_1, 1$
8.	$(\neg Q(a) \wedge Q(b)) \wedge R(a, b)$	$i\wedge, 6, 7$
9.	$\exists y((\neg Q(a) \wedge Q(y)) \wedge R(a, y))$	$i\exists y, 8$
10.	$\exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x, y))$	$i\exists x, 9$
11.	$\neg Q(b)$	P
12.	$\neg Q(b) \wedge Q(c)$	$i\wedge, 11, 3$
13.	$R(b, c)$	$e\wedge_2, 1$
14.	$(\neg Q(b) \wedge Q(c)) \wedge R(b, c)$	$i\wedge, 12, 13$
15.	$\exists y((\neg Q(b) \wedge Q(y)) \wedge R(b, y))$	$i\exists y, 14$
16.	$\exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x, y))$	$i\exists x, 15$
17.	$\exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x, y))$	$e\vee, 4, 5-10, 11-16$

2.3 Smíšené úlohy

1. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\neg \exists x P(x)$	P
2.	x	D
3.	$P(x)$	P
4.	$\exists x P(x)$	$i\exists x, 3$
5.	\perp	$e\neg, 4, 1$
6.	$\neg P(x)$	$i\neg, 3-5$
7.	$\forall x \neg P(x)$	$i\forall x, 3-6$

2. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

1.	$\exists x \neg P(x)$	P
2.	$\forall x P(x)$	P
3.	$x_0 : \neg P(x_0)$	W
4.	$P(x_0)$	$e\forall x, 2$
5.	\perp	$e\neg, 4, 3$
6.	\perp	$e\exists x, 1, 3-5$
7.	$\neg \forall x P(x)$	$i\neg, 2-6$

3. $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

1.	$\neg \forall x P(x)$	D
2.	$\neg \exists x \neg P(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$\neg P(x_0)$	P
5.	$\exists x \neg P(x)$	$i\exists x, 4$
6.	\perp	$e\neg, 5, 2$
7.	$\neg \neg P(x_0)$	$i\neg, 4-6$
8.	$P(x_0)$	$e\neg\neg, 7$
9.	$\forall x P(x)$	$i\forall x, 3-8$
10.	\perp	$e\neg, 9, 1$
11.	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	$i\neg, 2-10$
12.	$\exists x \neg P(x)$	$e\neg\neg, 11$

4. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

1.	$\forall x \neg P(x)$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$x_0 : P(x_0)$	W
4.	$\neg P(x_0)$	$e\forall x, 1$
5.	\perp	$e\neg, 3, 4$
6.	\perp	$e\exists x, 2, 3-5$
7.	$\neg \exists x P(x)$	$i\neg, 2-6$

5. $\forall x (\exists y P(y) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x \exists y (P(y) \Rightarrow Q(x))$

1.	$\forall x(\exists yP(y) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$\exists yP(y) \Rightarrow Q(x_0)$	$e\forall x, 1$
4.	$P(x_0)$	P
5.	$\exists yP(y)$	$i\exists y, 4$
6.	$Q(x_0)$	$e\Rightarrow, 5, 3$
7.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	$i\Rightarrow, 4-6$
8.	$\exists y(P(y) \Rightarrow Q(x_0))$	$i\exists y, 7$
9.	$\forall x\exists y(P(y) \Rightarrow Q(x))$	$i\forall x, 2-8$

6. $\forall x\neg\forall y(P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \vdash \forall x\exists yP(x, y)$

1.	$\forall x\neg\forall y(P(x, y) \Rightarrow Q(x, y))$	P
2.	x_0	D
3.	$\neg\forall y(P(x_0, y) \Rightarrow Q(x_0, y))$	$e\forall x, 1$
4.	$\neg\exists yP(x_0, y)$	P
5.	y_0	D
6.	$P(x_0, y_0)$	P
7.	$\exists yP(x_0, y)$	$i\exists y, 6$
8.	\perp	$e\neg, 7, 4$
9.	$\neg P(x_0, y_0)$	$i\neg, 6-8$
10.	$P(x_0, y_0)$	P
11.	\perp	$e\neg, 10, 9$
12.	$Q(x_0, y_0)$	$e\perp, 11$
13.	$P(x_0, y_0) \Rightarrow Q(x_0, y_0)$	$i\Rightarrow, 10-12$
14.	$\forall y(P(x_0, y) \Rightarrow Q(x_0, y))$	$i\forall y, 5-13$
15.	\perp	$e\neg, 14, 3$
16.	$\neg\neg\exists yP(x_0, y)$	$i\neg, 4-15$
17.	$\exists yP(x_0, y)$	$e\neg\neg, 16$
18.	$\forall x\exists yP(x, y)$	$i\forall x, 2-17$

7. $\forall x(P(x, x) \vee \forall yQ(x, y)) \vdash \forall x(\exists yP(x, y) \vee Q(x, x))$

1.	$\forall x(P(x, x) \vee \forall y Q(x, y))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0, x_0) \vee \forall y Q(x_0, y)$	$e\forall x, 1$
4.	$P(x_0, x_0)$	P
5.	$\exists y P(x_0, y)$	$i\exists y, 4$
6.	$\exists y P(x_0, y) \vee Q(x_0, x_0)$	$i\vee_1, 5$
7.	$\forall y Q(x_0, y)$	P
8.	$Q(x_0, x_0)$	$e\forall y, 7$
9.	$\exists y P(x_0, y) \vee Q(x_0, x_0)$	$i\vee_2, 8$
10.	$\exists y P(x_0, y) \vee Q(x_0, x_0)$	$e\vee, 3, 4-6, 7-9$
11.	$\forall x(\exists y P(x, y) \vee Q(x, x))$	$i\forall x, 2-10$

8. $\exists x(P(x, x) \wedge \forall y Q(x, y)) \vdash \exists x(\exists y P(x, y) \wedge Q(x, x))$

1.	$\exists x(P(x, x) \wedge \forall y Q(x, y))$	P
2.	$w : P(w, w) \wedge \forall y Q(w, y)$	W
3.	$P(w, w)$	$e\wedge_1, 2$
4.	$\exists y P(w, y)$	$i\exists y, 3$
5.	$\forall y Q(w, y)$	$e\wedge_2, 2$
6.	$Q(w, w)$	$e\forall y, 5$
7.	$\exists y(P(w, y) \wedge Q(w, w))$	$i\wedge, 5, 6$
8.	$\exists x(\exists y(P(x, y) \wedge Q(x, x)))$	$i\exists x, 7$
9.	$\exists x(\exists y(P(x, y) \wedge Q(x, x)))$	$e\exists x, 1, 2-8$

9. $\vdash \forall x \exists y R(x, y) \vee \neg \forall x R(x, x)$

1.	$\forall xR(x, x) \vee \neg\forall xR(x, x)$	LEM
2.	$\forall xR(x, x)$	P
3.	x_0	D
4.	$R(x_0, x_0)$	$e\forall x, 2$
5.	$\exists yR(x_0, y)$	$i\exists y, 4$
6.	$\forall x\exists yR(x, y)$	$i\forall x, 3-5$
7.	$\forall x\exists yR(x, y) \vee \neg\forall xR(x, x)$	$i\vee_1, 6$
8.	$\neg\forall xR(x, x)$	P
9.	$\forall x\exists yR(x, y) \vee \neg\forall xR(x, x)$	$i\vee_2, 8$
10.	$\forall x\exists yR(x, y) \vee \neg\forall xR(x, x)$	$e\vee, 1, 2-7, 8-9$

10. $\forall x\exists yR(x, y) \Rightarrow \neg\exists xR(x, x), \exists x\forall yR(y, x) \vdash \forall x\neg R(x, x)$

1.	$\forall x\exists yR(x, y) \Rightarrow \neg\exists xR(x, x)$	P
2.	$\exists x\forall yR(y, x)$	P
3.	$w : \forall yR(y, w)$	W
4.	x_0	D
5.	$R(x_0, w)$	$e\forall y, 3$
6.	$\exists yR(x_0, y)$	$i\exists y, 5$
7.	$\forall x\exists yR(x, y)$	$i\forall x, 4-6$
8.	$\forall x\exists yR(x, y)$	$e\exists x, 2, 3-7$
9.	$\neg\exists xR(x, x)$	$e\Rightarrow, 8, 1$
10.	x_0	D
11.	$R(x_0, x_0)$	P
12.	$\exists xR(x, x)$	$i\exists x, 11$
13.	\perp	$e\neg, 12, 9$
14.	$\neg R(x_0, x_0)$	$i\neg, 11-13$
15.	$\forall x\neg R(x, x)$	$i\forall x, 10-14$

11. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists yR(y, x)) \vdash \exists zR(z, a) \vee \neg\forall xP(x)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists yR(y, x))$	P
2.	$\neg(\exists zR(z, a) \vee \neg\forall xP(x))$	P
3.	$P(a)$	P
4.	$P(a) \Rightarrow \exists yR(y, a)$	$e\forall x, 1$
5.	$\exists yR(y, a)$	$e\Rightarrow, 3, 4$
6.	$z_0 : R(z_0, a)$	W
7.	$\exists zR(z, a)$	$i\exists z, 6$
8.	$\exists zR(z, a) \vee \neg\forall xP(x)$	$i\vee_1, 7$
9.	\perp	$e\neg, 8, 2$
10.	\perp	$e\exists y, 5, 6-9$
11.	$\neg P(a)$	$i\neg, 3-10$
12.	$\forall xP(x)$	P
13.	$P(a)$	$e\forall x, 12$
14.	\perp	$e\neg, 13, 11$
15.	$\neg\forall xP(x)$	$i\neg, 12-14$
16.	$\exists zR(z, a) \vee \neg\forall xP(x)$	$i\vee_2, 15$
17.	\perp	$e\neg, 16, 2$
18.	$\neg\neg(\exists zR(z, a) \vee \neg\forall xP(x))$	$i\neg, 2-17$
19.	$\exists zR(z, a) \vee \neg\forall xP(x)$	$e\neg\neg, 18$

3 Rovnost

1. $a = b, \neg(b = b \wedge b = c) \vdash \neg(a = c)$

1.	$a = b$	P
2.	$\neg(b = b \wedge b = c)$	P
3.	$a = c$	P
4.	$b = c$	$e=, 1, 3$
5.	$b = b$	$i=$
6.	$b = b \wedge b = c$	$i\wedge, 5, 4$
7.	\perp	$e\neg, 6, 2$
8.	$\neg(a = c)$	$i\neg, 3-7$

2. $\vdash a = b \Leftrightarrow \forall x(x = a \Rightarrow x = b)$

1.	$a = b$	P
2.	x_0	D
3.	$x_0 = a$	P
4.	$x_0 = b$	$e=, 1, 3$
5.	$x_0 = a \Rightarrow x_0 = b$	$i\Rightarrow, 3-4$
6.	$\forall x(x = a \Rightarrow x = b)$	$i\forall x, 2-5$
7.	$\forall x(x = a \Rightarrow x = b)$	P
8.	$a = a$	$i=$
9.	$a = a \Rightarrow a = b$	$e\forall x, 7$
10.	$a = b$	$e\Rightarrow, 8, 9$
11.	$a = b \Leftrightarrow \forall x(x = a \Rightarrow x = b) \quad i\Leftrightarrow. 1-6, 7-10$	

3. $\exists x\forall y(x = y) \vdash \forall x\forall y(x = y)$

1.	$\exists x\forall y(x = y)$	P
2.	$z_0 : \forall y(z_0 = y)$	W
3.	x_0	D
4.	$z_0 = x_0$	$e\forall y, 2$
5.	$\forall y(x_0 = y)$	$e=, 4, 2$
6.	$\forall x\forall y(x = y)$	$i\forall x, 3-5$
7.	$\forall x\forall y(x = y)$	$e\exists x, 1, 2-6$

4. $P(a), \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$

1.	$P(a)$	P
2.	$\neg P(b)$	P
3.	$a = b$	P
4.	$P(b)$	$e=, 3, 1$
5.	\perp	$e\neg, 4, 2$
6.	$\neg(a = b)$	$i\neg, 3-5$

5. $P(b) \wedge Q(b), \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$

1. $P(b) \wedge Q(b)$ P
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$ P
3. $P(b) \Rightarrow b = a$ $e\forall x, 2$
4. $P(b)$ $e\wedge_1, 1$
5. $b = a$ $e\Rightarrow, 4, 3$
6. $Q(b)$ $e\wedge_2, 1$
7. $Q(a)$ $e=, 5, 6$

6. $\forall x((x = a) \vee (x = b)), \exists xP(x) \vdash (\neg P(a)) \Rightarrow P(b)$

- | | | |
|-----|-----------------------------------|------------------------|
| 1. | $\forall x((x = a) \vee (x = b))$ | P |
| 2. | $\exists xP(x)$ | P |
| 3. | $\neg P(a)$ | P |
| 4. | $w : P(w)$ | W |
| 5. | $(w = a) \vee (w = b)$ | $e\forall x, 1$ |
| 6. | $w = a$ | P |
| 7. | $P(a)$ | $e=, 6, 4$ |
| 8. | \perp | $e\neg, 7, 3$ |
| 9. | $P(b)$ | $e\perp, 9$ |
| 10. | $w = b$ | P |
| 11. | $P(b)$ | $e=, 10, 4$ |
| 12. | $P(b)$ | $e\vee, 5, 6-9, 10-11$ |
| 13. | $P(b)$ | $e\exists x, 2, 4-12$ |
| 14. | $\neg P(a) \Rightarrow P(b)$ | $i\Rightarrow, 3-13$ |

7. $\forall x\forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z\neg(P(z) \wedge Q(z))$

1.	$\forall x \forall y ((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	P
2.	z_0	D
3.	$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	P
4.	$\forall y ((P(z_0) \wedge (z_0 = y)) \Rightarrow \neg Q(y))$	$e\forall x, 1$
5.	$(P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)) \Rightarrow \neg Q(z_0)$	$e\forall y, 4$
6.	$P(z_0)$	$e\wedge_1, 3$
7.	$z_0 = z_0$	$i=$
8.	$P(z_0) \wedge (z_0 = z_0)$	$i\wedge, 6, 7$
9.	$\neg Q(z_0)$	$e\Rightarrow, 8, 5$
10.	$Q(z_0)$	$e\wedge_2, 3$
11.	\perp	$e\neg, 10, 9$
12.	$\neg(P(z_0) \wedge Q(z_0))$	$i\neg, 3-11$
13.	$\forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$	$i\forall z, 2-12$

8. $\forall x \forall y (R(x, y) \Leftrightarrow x = y) \vdash \forall x R(x, x)$

1.	$\forall x \forall y (R(x, y) \Leftrightarrow x = y)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y (R(x, x_0) \Leftrightarrow x = x_0)$	$e\forall x, 1$
4.	$R(x_0, x_0) \Leftrightarrow x_0 = x_0$	$e\forall y, 3$
5.	$x_0 = x_0$	$i=$
6.	$R(x_0, x_0)$	$e\Leftrightarrow_2, 4, 5$
7.	$\forall x R(x, x)$	$i\forall x, 2-6$

9. $\forall x \neg R(x, x), R(a, b) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

1.	$\forall x \neg R(x, x)$	P
2.	$R(a, b)$	P
3.	$a = b$	P
4.	$R(b, b)$	$e=, 3, 2$
5.	$\neg R(b, b)$	$e\forall x, 1$
6.	\perp	$e\neg, 4, 5$
7.	$\neg(a = b)$	$i\neg, 3-6$
8.	$\exists y \neg(a = y)$	$i\exists y, 7$
9.	$\exists x \exists y \neg(x = y)$	$i\exists x, 8$

10. $\exists x \exists y R(x, y), \exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y R(x, y)$

1.	$\exists x \exists y R(x, y)$	P
2.	$\exists x \forall y (x = y)$	P
3.	x_0	D
4.	y_0	D
5.	$u : \forall y (u = y)$	W
6.	$a : \exists y R(a, y)$	W
7.	$b : R(a, b)$	W
8.	$u = a$	e $\forall y$, 5
9.	$a = u$	sym=, 8
10.	$R(u, b)$	e=, 9, 7
11.	$R(u, b)$	e $\exists y$, 6, 7–10
12.	$u = b$	e $\forall y$, 5
13.	$b = u$	sym=, 12
14.	$R(u, u)$	e=, 13, 11
15.	$R(u, u)$	e $\exists x$, 1, 6–14
16.	$u = x_0$	e $\forall y$, 5
17.	$R(x_0, u)$	e=, 16, 15
18.	$u = y_0$	e $\forall y$, 5
19.	$R(x_0, y_0)$	e=, 18, 17
20.	$R(x_0, y_0)$	e $\exists x$, 2, 5–19
21.	$\forall y R(x_0, y)$	i $\forall y$, 4–20
22.	$\forall x \forall y R(x, y)$	i $\forall x$, 3–21

11. $\vdash \forall x P(x, x) \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x, y) \Rightarrow \neg(x = y))$

1.	$\forall xP(x, x)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$P(y_0, y_0)$	$e\forall x, 1$
5.	$\neg P(x_0, y_0)$	P
6.	$x_0 = y_0$	P
7.	$\neg P(y_0, y_0)$	$e=, 5, 4$
8.	\perp	$e\neg, 4, 7$
9.	$\neg(x_0 = y_0)$	$i\neg 6-8$
10.	$\neg P(x_0, y_0) \Rightarrow \neg(x_0 = y_0)$	$i\Rightarrow, 5-9$
11.	$\forall y(\neg P(x_0, y) \Rightarrow \neg(x_0 = y))$	$i\forall y, 3-10$
12.	$\forall x\forall y(\neg P(x, y) \Rightarrow \neg(x = y))$	$i\forall x, 2-11$
13.	$\forall x\forall y(\neg P(x, y) \Rightarrow \neg(x = y))$	P
14.	x_0	D
15.	$\forall y(\neg P(x_0, y) \Rightarrow \neg(x_0 = y))$	$e\forall x, 13$
16.	$\neg P(x_0, x_0) \Rightarrow \neg(x_0 = x_0)$	$e\forall y, 15$
17.	$\neg P(x_0, x_0)$	D
18.	$x_0 = x_0$	$i=$
19.	$\neg(x_0 = x_0)$	$e\Rightarrow, 17, 16$
20.	\perp	$e\neg, 18, 19$
21.	$\neg\neg P(x_0, x_0)$	$i\neg, 17-20$
22.	$P(x_0, x_0)$	$e\neg\neg, 21$
23.	$\forall xP(x, x)$	$i\forall x, 14-22$
24.	$\forall xP(x, x) \Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg P(x, y) \Rightarrow \neg(x = y))$	$i\Leftrightarrow, 1-12, 13-23$

12. $\forall x\exists y(R(x, y) \wedge P(y)), \forall x\neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg\forall x\forall y(P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$

1.	z_0	D
2.	$\forall x \exists y (R(x, y) \wedge P(y))$	P
3.	$\forall x \neg R(x, x)$	P
4.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	P
5.	$\exists y (R(z_0, y) \wedge P(y))$	$e\forall x, 2$
6.	$y_0 : R(z_0, y_0) \wedge P(y_0)$	W
7.	$\exists y (R(y_0, y) \wedge P(y))$	$e\forall x, 2$
8.	$x_0 : R(y_0, x_0) \wedge P(x_0)$	W
9.	$P(y_0)$	$e\wedge_2, 6$
10.	$P(x_0)$	$e\wedge_2, 8$
11.	$\forall y (P(y_0) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (y_0 = y)))$	$e\forall x, 4$
12.	$P(y_0) \Rightarrow (P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0))$	$e\forall y, 11$
13.	$P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0)$	$e\Rightarrow, 9, 12$
14.	$y_0 = x_0$	$e\Rightarrow, 10, 13$
15.	$R(y_0, x_0)$	$e\wedge_1, 8$
16.	$R(y_0, y_0)$	$e=, 14, 15$
17.	$\neg R(y_0, y_0)$	$e\forall x, 3$
18.	\perp	$e\neg, 16, 17$
19.	\perp	$e\exists y, 7, 8-18$
20.	\perp	$e\exists y, 5, 6-19$
21.	$\neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	$i\neg, 4-20$
22.		

Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*