Jazyk pro úkol Jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{\mathsf{parentof}, \mathsf{man}, \mathsf{woman}\}\\ \mathsf{ar}(\mathsf{parentof}) &= 2,\\ \mathsf{ar}(\mathsf{man}) &= 1,\\ \mathsf{ar}(\mathsf{woman}) &= 1,\\ \mathsf{Func} &= \emptyset,\\ \mathsf{Kons} &= \{\mathsf{John}\}.\end{aligned}$$

Formalisace Proveďte v jazyce $\mathcal{L}$ formalisaci následujících vět, vztahů a vlastností:

1. „John je muž.“ Výslednou sentenci označte α.
2. Vlastnost *být maminkou.* (Použijte volnou proměnnou.) Výslednou formuli označte β.
3. Binární vztah _ *je maminkou* _. (Použijte dvě volné proměnné.) Výslednou formuli označte γ.
4. „Nikdo není současně mužem a ženou.“ Výslednou sentenci označte δ.
5. Binární vztah _ *je babičkou* _. Ke konstrukci můžete využít již zkonstruovanou formuli γ. Výslednou formuli označte ε.
6. „John má sestru.“ Výslednou sentenci označte ζ.
7. Vlastnost *mít sourozence.* (Použijte volnou proměnnou.) Výslednou formuli označte η.
8. „Každá maminka má tatínka.“ Výslednou sentenci označte θ.
9. „Nějaký tatínek má bratra.“ Výslednou sentenci označte κ.
10. „Každá Johnova teta má synovce.“ Výslednou sentenci označte λ.

Řešení. 1. $\alpha = \mathsf{man}(\mathsf{John})$.

2. $\beta = \mathsf{woman}(x) \wedge \exists y\, \mathsf{parentof}(x, y)$.

3. $\gamma = \mathsf{woman}(x) \wedge \mathsf{parentof}(x, y)$.
4. $\delta = \forall x \neg(\mathsf{man}(x) \wedge \mathsf{woman}(x))$.
5. $\varepsilon = \mathsf{woman}(x) \wedge \exists y(\mathsf{parentof}(x, y) \wedge \mathsf{parentof}(y, z))$.
6. $\zeta = \exists x(\mathsf{parentof}(x, \mathsf{John}) \wedge \exists y((\mathsf{parentof}(x, y) \wedge \mathsf{woman}(y))))$. V případě možnosti, že by John mohla být žena, explicitně specifikujeme, že dané dítě Johnova rodiče (sestra) není John sám:

   $$\exists x(\mathsf{parentof}(x, \mathsf{John}) \wedge \exists y((\mathsf{parentof}(x, y) \wedge \mathsf{woman}(y)) \wedge \neg(\mathsf{John} = y))).$$

7. $\eta = \exists x(\mathsf{parentof}(x, z) \wedge \exists y(\mathsf{parentof}(x, y) \wedge \neg(z = y)))$.
8. $\theta = \forall x((\mathsf{woman}(x) \wedge \exists y \mathsf{parentof}(x, y)) \Rightarrow \exists z(\mathsf{man}(z) \wedge \mathsf{parentof}(z, x)))$.
9. Dovolíme si relaxaci notace a nepíšeme asociující závorky u vícečetné konjunkce.

   $$\begin{array}{ll} \kappa = \exists x \exists y \exists z \exists w(& \\ \quad \mathsf{man}(x) \wedge \mathsf{parentof}(x, y) & x \text{ je tatínek } y, \\ \quad \wedge\ \mathsf{parentof}(z, x) & z \text{ je rodič } x, \\ \quad \wedge\ \mathsf{parentof}(z, w) \wedge \mathsf{man}(w) \wedge \neg(x = w) & \text{který má syna } w \\ \quad). & \end{array}$$

10. Budu podvádět. Zkuste samostatně formalisovat vztah být tetou ($\mathsf{aunt}(x, y)$) a být synovcem či neteří ($\mathsf{nephew}(x, y)$). Pak rozepište v následující formalisaci (odvozené) predikáty aunt a nephew jejich definicemi, které jste vymysleli.

    $$\lambda = \forall x(\mathsf{aunt}(x, \mathsf{John}) \Rightarrow \exists y(\mathsf{nephew}(y, x) \wedge \mathsf{man}(y))).$$

Příklad interpretace (Sedmiprvková) interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ je dána následovně:

$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, j, k\} \\ [\![\mathsf{parentof}]\!] &= \{(a, b), (a, c), (b, d), (b, j), (c, k), (e, j)\} \\ [\![\mathsf{man}]\!] &= \{e, j, k\} \\ [\![\mathsf{woman}]\!] &= \{a, b, c\} \\ [\![\mathsf{John}]\!] &= j \end{aligned}$$

1. Nakreslete si obrázek popisující danou interpretaci: vykreslete prvky množiny U, zakroužkujte všechny prvky s vlastností $[\![\mathsf{man}]\!]$, všechny prvky s vlastností $[\![\mathsf{woman}]\!]$, označte konstantu $[\![\mathsf{John}]\!]$, a nakreslete šipky mezi prvky znázorňující vztah $[\![\mathsf{parentof}]\!]$.
2. Rozhodněte o pravdivosti sentencí α, δ, ζ, θ, κ a λ v interpretaci $\mathcal{I}$.
3. Nalezněte význam formulí β, γ, ε, η v interpretaci $\mathcal{I}$.

Řešení. Pro interpretaci $\mathcal{I}$ platí:

1. $\mathcal{I} \models \alpha$.
2. $\mathcal{I} \models \delta$.
3. $\mathcal{I} \not\models \zeta$.
4. $\mathcal{I} \not\models \theta$.
5. $\mathcal{I} \not\models \kappa$.
6. $\mathcal{I} \models \lambda$.

V interpretaci $\mathcal{I}$ popíšeme významy formulí β, γ, ε a η pro vhodné seznamy deklarovaných proměnných.

1. $$[\![\beta]\!]_{(x)} = \{a, b, c\}.$$
2. $$[\![\gamma]\!]_{(x,y)} = \{(a, b), (a, c), (b, d), (b, j), (c, k)\}.$$
3. $$[\![\varepsilon]\!]_{(x,z)} = \{a\}.$$
4. $$[\![\eta]\!]_{(z)} = \{b, c, d, j\}.$$

Tvorba modelů Pro každé z následujících kritérií vymyslete co nejjednodušší příklad interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$, která dané kritérium splňuje, a příklad interpretace $\mathcal{J}$, která daná kritérium nesplňuje.

1. Je model sentence δ.
2. Je model sentence θ.
3. Je model množiny sentencí $\{\kappa, \lambda\}$.

Řešení. Nástin možného řešení:

1. Mějme $\mathcal{I}$ s universem $U = \{a\}$,

   $$\begin{aligned} [\![\mathsf{woman}]\!] &= \emptyset \\ [\![\mathsf{man}]\!] &= \emptyset \end{aligned}$$

   a zbytek predikátových symbolů interpretujme zcela libovolně. Neformální argument: nikdo není současně mužem a ženou, neboť máme pouze a, které dokonce není *ani* mužem, *ani* ženou. Zajímavost: ačkoli jsme to nespecifikovali, nutně platí, že $[\![\mathsf{John}]\!] = a$, a v naší interpretaci tedy John není mužem (ani ženou).

   Mějme $\mathcal{J}$ s universem $U = \{a\}$,

   $$\begin{aligned} [\![\mathsf{woman}]\!] &= \{a\} \\ [\![\mathsf{man}]\!] &= \{a\} \end{aligned}$$

   a zbytek predikátových symbolů interpretujme zcela libovolně. Neformální argument: a je současně mužem a ženou. Zajímavost: a je nutně John, osoba obou pohlaví současně.

2. Mějme $\mathcal{I}$ s universem $U = \{a\}$,

   $$[\![\mathsf{woman}]\!] = \emptyset$$

   a zbytek predikátových symbolů interpretujme zcela libovolně. Neformální argument: každá maminka má tatínka, neboť v naší interpretaci není maminek (a není žena).

Mějme $\mathcal{J}$ s universem $U = \{a, b\}$,

$$\begin{aligned} [\![\mathsf{woman}]\!] &= \{a, b\} \\ [\![\mathsf{man}]\!] &= \emptyset \\ [\![\mathsf{parentof}]\!] &= \{(a, b)\} \end{aligned}$$

a zbytek predikátových symbolů interpretujme zcela libovolně. Neformální argument: a je maminkou b, a přitom nemá tatínka (neboť v naší interpretaci není mužů).

3. Zcela neformálně (dopracujte podrobnosti ve stylu předchozích bodů!): Pro $\mathcal{I}$: zařiďme pravdivost κ tak, že v našem universu budou prvky t, b, s, d: t bude tatínek s (syna), d bude dědeček, tedy tatínek t, a b bude syn d, tedy bratr t. Pravdivost λ zařiďme tak, že v naší interpretaci nebudou tety, například tak, že nebudou ženy.

   Pro $\mathcal{J}$: zařídit, aby $\mathcal{J}$ nebyla modelem množiny $\{\kappa, \lambda\}$, lze tak, že nebudou pravdivé obě sentence současně. Učiňme κ nepravdivou a λ pravdivou. Zcela neformálně: žádný tatínek nemá mít bratra, každá Johnova teta má mít synovce. Zařiďte, aby John neměl tety (budiž nikdo ženou), a aby nebylo tatínků, neboť pak žádný tatínek nebude mít bratra (budiž nikdo mužem). Dopracujte podrobnosti.

Nepovinné Promyslete, jak by se daly formalisovat další rodinné vztahy a prozkoumejte na vhodných interpretacích, zda se vaše formalisace chová očekávaným způsobem.