Metro chaosu Ať symbol B označuje binární predikát „bouchnout do“, tedy $B(x, y)$ označuje „x bouchnul do y“. Propojte následující sentence predikátové logiky s pro ně nejvhodnějšími popisy v přirozeném jazyce:

$\exists x \exists y B(x, y)$	Metro chaosu!
$\exists x \forall y B(x, y)$	Někdo blokoval jediný východ.
$\forall x \exists y B(x, y)$	To se stává.
$\forall x \forall y B(x, y)$	Nevychované dítě proběhlo metrem.
$\exists y \forall x B(x, y)$	Každý utrpěl.
$\forall y \exists x B(x, y)$	Přeplněné metro.

Formalisace českých vět Je dán jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ s množinou proměnných $\mathsf{Var} = \{x, y, z\}$, jehož množina predikátových symbolů je

$$\mathsf{Pred} = \{Obd, Nav, Prof, Stud, P\},$$

množina konstantních symbolů je $\mathsf{Kons} = \{m\}$ a množina funkčních symbolů je prázdná. Arita symbolů Obd a Nav je 2, arita symbolů $Prof$, $Stud$ a P je 1.

Predikátové symboly mají popořadě formalisovat následující vztahy mezi jsoucny z přirozeného jazyka:

$Obd(x, y)$	x obdivuje y,
$Nav(x, y)$	x navštívil(a) y,
$Prof(x)$	x je profesor(ka),
$Stud(x)$	x je student(ka),
$P(x)$	x je přednáška.

Konstantní symbol m odkazuje na nějakou (konkrétní) Marii.

Přeložte co nejvěrněji následující věty z češtiny do jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky.

1. Marie obdivuje všechny profesory.
2. Nějaký profesor obdivuje Marii.
3. Marie se obdivuje.
4. Žádný student nenavštívil všechny přednášky.
5. Žádnou přednášku nenavštívili všichni studenti.
6. Není přednášky, kterou by nenavštívil ani jeden student.

Sémantika predikátové logiky

Úloha 1. Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\mathsf{Pred} = \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,$$
$$\mathsf{Func} = \{f\}, ar(f) = 1,$$
$$\mathsf{Kons} = \{a\}.$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{N} \\ [\![P]\!] &= \{0, 3, 12\} \\ [\![Q]\!] &= \{4 \cdot z \mid z \in \mathbb{N}\} \\ [\![R]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\} \\ [\![f]\!] &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & \quad n \mapsto n + 5 \\ [\![a]\!] &= 2 \end{aligned}$$

Vyhodnoťte termy $f(f(a))$ a $f(f(x))$ v kontextu proměnných

$$\begin{aligned} \tau : \{x\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 3. \end{aligned}$$

Rozhodněte, které z následujících formulí jsou pravdivé v kontextu proměnných

$$\begin{aligned} \rho : \{x, y\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 3, \\ y &\mapsto 4 \end{aligned}$$

1. $R(y, x)$.
2. $P(x) \wedge R(f(x), y)$.
3. $\forall z(Q(z) \Rightarrow R(x, z))$.

Nalezněte význam $[\![\varphi]\!]_D$ pro následující formule φ a seznamy deklarovaných formulí D:

1. $R(a, y)$ pro $D = (y)$.
2. $\exists y(P(y) \wedge R(x, y))$ pro $D = (x)$.
3. $(P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(y, f(x))$ pro $D = (x, y)$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow P(x))$.
2. $\exists x R(a, x)$.
3. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \Rightarrow R(x, y)))$.
4. $\forall x \exists y(R(x, y) \wedge P(f(x)))$.
5. $\exists y \forall x(Q(x) \Rightarrow R(y, f(x)))$.

Úloha 2. Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} &\mathsf{Pred} = \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ &\mathsf{Func} = \{g\}, ar(g) = 2, \\ &\mathsf{Kons} = \{a\}. \end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R} \\ [\![P]\!] &= \{-5, \frac{1}{5}\} \\ [\![R]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid m < n\} \\ [\![g]\!] &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\quad (m, n) \mapsto m \cdot n \\ [\![a]\!] &= -1 \end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $R(a, g(a, a))$.
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow R(a, x))$.
3. $\exists x(P(x) \wedge R(a, g(x, x)))$.
4. $\forall x(R(x, a) \Rightarrow \exists z(R(g(a, z), x)))$.
5. $\exists y \forall x(P(x) \Rightarrow R(g(y, y), x))$.

Úloha 3. V jakém jazyce je

$$\varphi = \forall x P(f(x, c))$$

sentencí? Vymyslete jednu interpretaci, ve které je φ pravdivá, a jednu interpretaci, ve které je φ nepravdivá.

Úloha 4. Ukažte, že sentence (v jakém jazyce je to sentence?)

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x P(x)) \wedge (\exists x \neg Q(x))$$

je splnitelná.