

Úloha 1. Jazyk predikátové logiky \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$$\text{Pred} = \{R\}, \quad ar(R) = 2$$

$$\text{Func} = \emptyset$$

$$\text{Kons} = \emptyset$$

Mějme tři sentence

$$\varphi_1 = \forall x R(x, x)$$

$$\varphi_2 = \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$$

$$\varphi_3 = \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$$

Sestrojte tři interpretace, ve kterých jsou vždy pravdivé právě dvě ze tří výše uvedených sentencí. Až se vám to podaří, pokuste se najít *nejmenší* takové interpretace (to jest, interpretace s universem, které má nejmenší možný počet prvků).

Úloha 2. Rozlište sentencemi matematické struktury $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ a $(\mathbb{Q}, <)$. Používáme jazyk predikátové logiky s jediným (binárním) predikátovým symbolem $<$, který zapisujeme infixně a v daných matematických strukturách ho interpretujeme jako skutečnou ostrou nerovnost.

Co znamená *rozlišit* dvě interpretace nějakého jazyka predikátové logiky? To znamená najít sentenci, která je pravdivá v jedné interpretaci, ale nepravdivá v druhé interpretaci (či naopak).

Úloha 3. Mějme matematickou strukturu $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, tedy přirozená čísla s operacemi sčítání a násobení. Uvažujme příslušný jazyk predikátové logiky (obsahující dva binární funkční symboly, dejme tomu $+$ a \cdot)

a interpretujme tento jazyk v dané matematické struktuře. Sestrojte formule s následujícím významem:

1. Formule φ , kde $\text{free}(\varphi) = \{x\}$ a

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{(x)} = \{0\}.$$

2. Formule ψ , kde $\text{free}(\psi) = \{x\}$ a

$$\llbracket \psi \rrbracket_{(x)} = \{0\}.$$

3. Formule α , kde $\text{free}(\alpha) = \{y, z\}$ a

$$\llbracket \alpha \rrbracket_{(y,z)} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ je následníkem } m\}.$$

4. Formule β , kde $\text{free}(\beta) = \{y, z\}$ a

$$\llbracket \beta \rrbracket_{(y,z)} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}.$$

Úloha 4. Nalezněte sentenci, která charakterizuje

1. všechny jednoprvkové interpretace,
2. všechny dvouprvkové interpretace,
3. nulaprvkovou interpretaci.

Co znamená, že sentence φ *charakterizuje* všechny jednoprvkové interpretace? To znamená, že je φ pravdivá právě pro ty interpretace \mathcal{I} , jejichž universum má přesně jeden prvek.

Obecněji: Co znamená, že sentence φ *charakterizuje* třídu interpretací C ? To znamená, že je φ pravdivá právě pro ty interpretace \mathcal{I} , které leží v C .