Úloha 1. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2\\ \mathsf{Func} &= \emptyset\\ \mathsf{Kons} &= \emptyset\end{aligned}$$

Mějme tři sentence

$$\varphi_1 = \forall x R(x,x)$$
$$\varphi_2 = \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$$
$$\varphi_3 = \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$$

Sestrojte tři interpretace, ve kterých jsou vždy pravdivé právě dvě ze tří výše uvedených sentencí. Až se vám to podaří, pokuste se najít *nejmenší* takové interpretace (to jest, interpretace s universem, které má nejmenší možný počet prvků).

Řešení. Zde jsou řešení daných třech úloh: všechna ověření ponecháváme na čtenářce a čtenáři. Ne všechna řešení jsou nejmenší možná.

1. $\varphi_1, \varphi_2 \not\models \varphi_3$, což dokazuje interpretace $U = \{a, b, c\}$ a
$$[\![R]\!] = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}.$$
2. $\varphi_2, \varphi_3 \not\models \varphi_1$, což dokazuje interpretace $U = \{a, b, c\}$ a
$$[\![R]\!] = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\}.$$
3. $\varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2$, což dokazuje interpretace $U = \{a, b, c\}$ a
$$[\![R]\!] = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}.$$

Úloha 2. Rozlište sentencemi matematické struktury $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ a $(\mathbb{Q}, <)$. Používáme jazyk predikátové logiky s jediným (binárním) predikátovým symbolem $<$, který zapisujeme infixně a v daných matematických strukturách ho interpretujeme jako skutečnou ostrou nerovnost.

Co znamená *rozlišit* dvě interpretace nějakého jazyka predikátové logiky? To znamená najít sentenci, která je pravdivá v jedné intepretaci, ale nepravdivá v druhé intepretaci (či naopak).

Řešení. Sestrojíme dvě sentence φ a ψ. Sentence φ rozliší strukturu $(\mathbb{N}, <)$ od ostatních dvou, sentence ψ rozliší strukturu $(\mathbb{Z}, <)$ a $(\mathbb{Q}, <)$.

1. Nechť $\varphi = \forall x \exists y (y < x)$.
2. Nechť $\psi = \forall x \forall y (x < y \Rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$.

Sentence φ říká, že ke každému číslu existuje číslo menší, což je pravda pro celá čísla, ale nepravda pro přirozená čísla.

Sentence ψ říká přibližně toto: „mezi každými dvěma čísly existuje další číslo“. To je pravda pro racionální čísla, ale ne pro celá čísla. Je nutno však být při formalisaci opatrný: sentence $\psi' = \forall x \forall y \exists z (x < z \wedge z < y)$ by nefungovala. Ta sice říká, že pro každou dvojici čísel existuje číslo větší než první a menší než druhé, ale všimněme si, že to například pro dvojici $(12, 7)$ není pravda (naschvál jsme vzali první číslo větší než druhé). Ze stejného důvodu by nefungovala sentence $\psi'' = \forall x \forall y (\neg(x = y) \Rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$.

Poznámka: pokud bychom se snažili rozlišit $(\mathbb{Q}, <)$ a $((R), <)$, nepovede se nám to. (To je poměrně pokročilý výsledek týkající se predikátové logiky.)

Úloha 3. Mějme matematickou strukturu $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, tedy přirozená čísla s operacemi sčítání a násobení. Uvažujme příslušný jazyk predikátové logiky (obsahující dva binární funkční symboly, dejme tomu $+$ a $\cdot$) a interpretujme tento jazyk v dané matematické struktuře. Sestrojte formule s následujícím významem:

1. Formule φ, kde $\mathsf{free}(\varphi) = \{x\}$ a
$$[\![\varphi]\!]_{(x)} = \{0\}.$$
2. Formule ψ, kde $\mathsf{free}(\varphi) = \{x\}$ a
$$[\![\varphi]\!]_{(x)} = \{0\}.$$
3. Formule α, kde $\mathsf{free}(\alpha) = \{y, z\}$ a
$$[\![\alpha]\!]_{(y,z)} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ je následníkem } m\}.$$
4. Formule β, kde $\mathsf{free}(\alpha) = \{y, z\}$ a
$$[\![\beta]\!]_{(y,z)} = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}.$$

Řešení.
1. Nechť $\varphi_0(x) = (x + x = x)$.
2. Nechť $\varphi_1(x) = (x \cdot x = x) \wedge \neg(x + x = x)$. Zkráceně:
$$\varphi_1(x) = (x \cdot x = x) \wedge \neg\varphi_0(x).$$
3. Nechť $\varphi_n(x, y) = \exists z((x + z = y) \wedge \varphi_1(z))$, tedy nezkráceně:
$$\varphi_n(x, y) = \exists z((x+z = y) \wedge ((z \cdot z = z) \wedge \neg(z+z = z))).$$
4. Nechť $\varphi_m(x, y) = \exists z((x + z = y) \wedge \neg\varphi_0(z))$.

Úloha 4. Nalezněte sentenci, která charakterisuje

1. všechny jednoprvkové interpretace,
2. všechny dvouprvkové interpretace,
3. nulaprvkovou intepretaci.

Co znamená, že sentence φ *charakterisuje* všechny jednoprvkové interpretace? To znamená, že je φ pravdivá právě pro ty interpretace $\mathcal{I}$, jejichž universum má přesně jeden prvek.

Obecněji: Co znamená, že sentence φ *charakterisuje* třídu interpretací C? To znamená, že je φ pravdivá právě pro ty interpretace $\mathcal{I}$, které leží v C.

Řešení.
1. Nechť $\varphi_1 = \exists x \forall y (y = x)$.
2. Nechť $\varphi_2 = \exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$.
3. Nechť $\varphi_0 = \neg\exists x (x = x)$.