

Úloha 1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n splňující $n > 3$ platí nerovnost

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}.$$

Úloha 2. Předpokládejte, že existují konstanty a, b, c, d takové, že pro všechna kladná celá čísla n platí rovnost

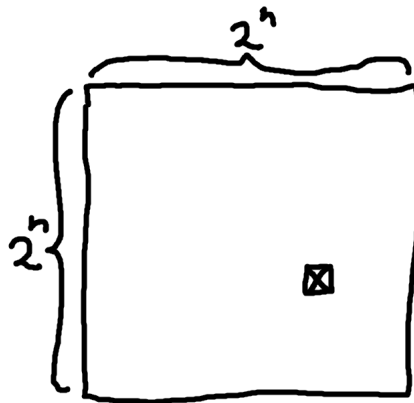
$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Výběrem konkrétních hodnot pro n odvoďte, jakých hodnot by pak dané konstanty nutně musely nabývat (využijte své znalosti lineární algebry). Poté potvrďte obecnou platnost vaší rovnosti indukci.

Úloha 3 (Trimina). *Trimino* je následující geometrický útvar:



Děravá podlaha je čtvercová síť o velikosti $2^n \times 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$), ze které je odstraněn jeden čtvereček.



Dokažte, že každou děravou podlahu lze pomocí trimin *vydláždít*: to jest, pokrýt danou čtvercovou síť (potenciálně orotovanými) triminy tak, že se jednotlivá trimina nepřekrývají, a současně není pokryta díra (odstraněný čtvereček).

Úloha 4. Nechť S je podmnožina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadána indukativními pravidly

1. $(n, 0)$ je v S pro každé $n \in \mathbb{N}$.
2. Pokud je (n, m) v S , pak je v S i $(n, m + 1)$.
 - Ukažte, že $(4, 3) \in S$.
 - Dokažte, že $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Úloha 5. Nechť T je podmnožina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadána indukativními pravidly

1. $(0, 0)$ je v T .
2. Pokud je (n, m) v T , pak je v T i $(n, m + 1)$.
3. Pokud je (n, m) v T , pak je v T i $(n + 1, m)$.
4. Pokud je (n, m) v T , pak je v T i $(n + 1, m + 1)$.
 - Dokažte dvěma různými způsoby, že $(4, 3) \in T$.
 - Dokažte, že $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 - Jak by vypadala množina T , kdybyste z její indukativní definice odebrali první, druhé, třetí či čtvrté pravidlo?

Úloha 6. Připomeňte si, jakým způsobem se ve hře šachy pohybuje figura jezdc (koně). Uvažujme nekonečnou šachovnici tvaru čtvrtroviny S , tj. množinu posic

$$S = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Dokažte, že se konečným počtem kroků kůň umí přemístit na libovolnou posici nekonečné šachovnice S (aniž by ji opustil).

