Pokud není v zadání řečeno jinak, uvažujeme v zadání vždy grafy neorientované a *obyčejné*: prosté a bez smyček. *Prosté*: bez paralelních hran.

Úloha 1. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Na každé party je vždy alespoň jedna dvojice lidí, kteří mají na dané party stejný počet přátel.

Úloha 2. Pro party o dvou, třech a čtyřech lidech nakreslete příklad situace z minulé úlohy, kde existuje *právě a pouze jedna* dvojice lidí, kteří mají stejný počet přátel.

Úloha 3 (Náročná). Grafům, ve kterých mají pouze dva vrcholy stejný stupeň, se říká *téměř iregulární*. Zkuste dokázat, že pro každé $n \geq 2$ existují (až na isomorfismus) právě dva téměř iregulární grafy, které jsou navíc vzájemnými doplňky.

Úloha 4 (Náročná). Pro každou množinu kladných přirozených čísel, jejíž maximem je číslo n, existuje graf o $(n+1)$ vrcholech, jehož vrcholy mají přesně stupně z dané množiny.

Úloha 5. Sedm přátel si před odjezdem na dovolenou slíbilo, že každý pošle pohledy třem ostatním. Může se stát, že každý z nich dostane pohledy právě od těch, kterým sám pohledy poslal?

Úloha 6 (Náročná). Dokažte, že na večírku, kterého se účastní alespoň 6 lidí, lze vždy nalézt trojici lidí, kteří se všichni navzájem znají, nebo takovou trojici, ve které se žádní dva lidé vzájemně neznají. Předpokládejte, že „znát někoho" je symetrická relace.

Úloha 7. Popište, jak vypadají 0-regulární, 1-regulární a 2-regulární grafy.

Úloha 8. Silniční síť zahrnuje $2n$ měst a z každého města vede n silnic do jiných měst. Existuje silniční spojení mezi libovolnými dvěma městy?

Úloha 9 (Hyperkrychle). Vícerozměrná krychle o rozměru n, také n-cube, je neorientovaný graf s 2^n vrcholy, které jsou označeny dvojkovými čísly $0,1,2,\ldots,2^n-1$. Hranou jsou spojeny ty dvojice vrcholů, jejichž dvojkové označení se liší právě v jednom bitu.

1. Nakreslete graf představující n-cube pro $n=1$ až $n=4$.
2. Určete stupně vrcholů a celkový počet hran v n-cube pro obecné n.

Úloha 10. Dokažte, že v souvislém grafu mají libovolné dvě nejdelší cesty alespoň jeden společný vrchol.

Úloha 11. Dokažte, že pro libovolný graf G platí, že je souvislý G nebo jeho doplněk.

Úloha 12 (Automorfismy). Automorfismus a grafu G je isomorfismus $a : G \to G$. Automorfismy úzce souvisí se symetrií. Určete počet automorfismů grafu tvaru kružnice o n vrcholech. Určete počet automorfismů úplného grafu K_n. Určete počet automorfismů grafu tvaru cesty délky n. Náročné: kolik automorfismů má n-cube?

Úloha 13. Sestrojte graf, který nemá žádný netriviální automorfismus. (Vždy existuje identický (triviální) automorfismus.)

Úloha 14. Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou skóre nějakého grafu.

1. $(7,6,5,4,3,3,2)$,
2. $(3,3,3,2,2,2,1)$,
3. $(6,6,5,4,3,3,1)$,
4. $(3,3,2,2,2,2,1)$.

Úloha 15. *Hranový graf* grafu G je graf $edge(G)$, jehož vrcholy jsou hrany grafu G, a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když byly v grafu G sousedními hranami.

1. Je předchozí definice zcela korektní? Existuje hranový graf pro libovolný graf G?
2. Existují dva různé grafy s totožným hranovým grafem?
3. Je každý graf hranovým grafem nějakého grafu?
4. Kolik má hranový graf grafu G hran?

Úloha 16. Sestrojte graf s co nejmenším počtem vrcholů, který obsahuje právě jeden vrchol stupně 0, 1, 2 a 3.

Úloha 17 (Náročná). Dokažte či vyvraťte: Pro každý graf G lze sestrojit regulární graf H, který obsahuje G jako indukovaný podgraf.