Pokud není v zadání řečeno jinak, uvažujeme v zadání vždy grafy neorientované a *obyčejné*: prosté a bez smyček. *Prosté*: bez paralelních hran.

Úloha 1. Jaký je součet stupňů ve stromu o n vrcholech?

Úloha 2. Sestrojte strom, který obsahuje přesně

- 2 vrcholy stupně 3,
- 3 vrcholy stupně 4,
- 1 vrchol stupně 6,
- žádný další vrchol stupně 3 a více.

1. Kolik obsahuje vámi sestrojený graf vrcholů?
2. Kolik obsahuje vámi sestrojený graf listů?
3. Dokážete sestrojit další neisomorfní strom s vlastnostmi ze zadání? Má stejný počet vrcholů a listů jako první vámi sestrojený graf?

Úloha 3. Z Úlohy 1 víme, jaký je součet stupňů ve stromu o n vrcholech – označme ho S. Předpokládejme, že $L = (d_1, \dots, d_n)$ je seznam kladných celých čísel (seřazených od největšího) se součtem S. Lze pro takový seznam L sestavit strom, který má skóre L?

Úloha 4. Kolik obsahuje molekula nasyceného uhlovodíku atomů vodíku v závislosti na počtu atomů uhlíku? Rozhodněte, které z následujících uhlovodíků mají (strukturně) isomerní varianty: metan, etan, propan, butan, pentan. Případné isomery sestrojte.

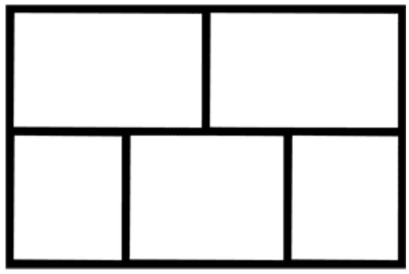
Úloha 5. Ať Δ je maximální stupeň vrcholu ve stromu T o n vrcholech. Pro každé přirozené $k \leq \Delta$ označme jako n_k počet vrcholů stupně k. Lze počet listů stromu T (tedy číslo n_1) odvodit na základě znalosti počtu vrcholů ostatních stupňů? Pokud ano, odvoďte vzorec pro výpočet počtu listů. Pokud ne, ukažte, proč to nejde. (Sestrojte dva stromy se stejným počtem vrcholů a stejnými hodnotami $n_2, \dots, n_\Delta$, ale různým počtem listů.)

Úloha 6. Lze sestrojit eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran?

Úloha 7. Nechť G_n je pravidelná síť rovnostranných trojúhelníků, na jejíž každé straně je n vrcholů, graf $G_{m,n}$ je pravoúhlá síť, na jejíchž stranách je m, respektive n vrcholů.

- Určete celkový počet vrcholů a hran grafů G_n a $G_{m,n}$.
- Pro jaké hodnoty n a m lze výše uvedené grafy G_n a $G_{m,n}$, úplný graf K_n, popřípadě úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ pokrýt jediným uzavřeným či otevřeným tahem?

Úloha 8. Rozhodněte, zda lze nakreslit (spojitou, hladkou) křivku, která protne každou úsečku v následujícím obrázku právě jednou (a sama sebe nikde neprotíná).



Úloha 9. Nakreslete jedním tahem úplné grafy K_3, K_5, K_7 a K_9.

Úloha 10 (Náročnější?)**.** Připomeňme, že n-cube je graf representující n-rozměrnou hyperkrychli.

1. Pro která n je n-cube eulerovský graf?
2. Kolika nejméně otevřenými tahy lze nakreslit n-cube, která není eulerovská?
3. n-cube obsahuje jako vrcholy binární řetězce délky n. Pokud to jde, sestrojte algoritmus, který v závislosti na n vytiskne posloupnost binárních řetězců kódujících eulerovský tah v n-cube.

Úloha 11. Sestrojte vážený graf o alespoň šesti vrcholech a alespoň jedenácti hranách. Nalezněte jeho minimální kostru s využitím nějakého algoritmu z přednášky.