Úloha 1. Uvažujte jazyk predikátové logiky s dvěma unárními funkčními symboly: f a g. Formalisujte tvrzení „f je prostá funkce“, poté formalisujte důsledek „složení dvou prostých funkcí f a g je prostá funkce“, a dokažte ho.

Úloha 2. Uvažujte jazyk predikátové logiky s dvěma unárními funkčními symboly: f a g. Formalisujte tvrzení „f je surjektivní funkce“, poté formalisujte důsledek „složení dvou surjektivních funkcí f a g je surjektivní funkce“, a dokažte ho.

Úloha 3. Formalisujte následující tvrzení:

Průnikem dvou symetrických relací je relace symetrická.

Dokažte toto tvrzení.

Úloha 4. Formalisujte následující tvrzení:

Složení dvou reflexivních relací je relace reflexivní.

Dokažte toto tvrzení.

Úloha 5. Jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{Pes, Vyje, Ma, Kocka, Mys, PSS\}, \\
&\quad ar(Pes, Vyje, Kocka, Mys, PSS) = 1 \\
&\quad ar(Ma) = 2 \\
\mathsf{Func} &= \emptyset, \\
\mathsf{Kons} &= \{jan\}
\end{aligned}$$

- Formalisujte v jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka:

  φ_1: Všichni psi vyjí.

  φ_2: Kdokoli, kdo má kočku, nemá žádnou myš.

  φ_3: Kdo má problémy se spaním, nemá nic, co vyje.

  φ_4: Jan má kočku nebo psa.

  φ_5: Pokud má Jan problémy se spaním, nemá žádné myši.

- Přirozenou dedukcí rozhodněte, zda platí logický důsledek

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vdash \varphi_5.$$

Úloha 6. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 Každý člověk má právo sníst cokoli, co je hloupější než některý vepř.

φ_2 Pašík je vepř chytřejší než jakékoli nemluvně (tj. než všechna nemluvňata).

φ_3 Každý člověk má právo sníst jakékoli nemluvně.

Dokažte, že z formulí φ_1, φ_2 logicky plyne formule φ_3.

Úloha 7. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \dots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo kupuje kila mrkve, vlastní králíka nebo obchod.

φ_2: Každý pes honí nějakého králíka.

φ_3: Marie kupuje kila mrkve.

φ_4: Každý, kdo vlastní králíka, nenávidí cokoli, co honí nějakého králíka.

φ_5: Jan vlastní psa.

φ_6: Jakmile někdo nenávidí něco, co vlastní někdo další, bude s ním odmítat chodit. (Pro každého x, který nenávidí y, které je vlastněno nějakým z, platí, že x bude odmítat chodit se z.)

φ_7: Pokud Marie nevlastní obchod, bude odmítat chodit s Janem.

Predikát „kupovat kila mrkve“ můžete deklarovat jako unární. Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ logicky plyne formule φ_7.

Úloha 8. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \dots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo vynikne na zkoušce, poctivě studuje, je génius nebo má štěstí.

φ_2: Každý, kdo dostane A, vynikne na zkoušce.

φ_3: Žádný student OI nemá štěstí.

φ_4: Každý, kdo pije pivo, nestuduje.

φ_5: Pokud každý student OI dostane A, pak je každý student OI, který pije pivo, génius.

Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ logicky plyne formule φ_5.

Úloha 9. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}\forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x,y))),\\ \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))),\\ \forall x \forall y \forall z((V(x,y) \wedge V(y,z)) \Rightarrow V(x,z))\\ \vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))).\end{aligned}$$

(*Každý slon váží více než jakýkoli kůň. Nějaký kůň váží více než jakýkoli osel. Vážit více je transitivní vztah. Proto každý slon váží více než jakýkoli osel.*)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.

Úloha 10. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)) \vdash \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))$$

(*Koně jsou zvířata. Proto ocas koně je ocasem zvířete.*)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.