Cvičení: přirozená dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}\, i\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\, e\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\, i\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \boxed{\begin{array}{cc} x_0 : & \varphi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}\, e\exists x$

	Zavedení	Eliminace	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}\, i=$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}\, e=$	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\, sym=$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\, trans=$

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termech se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

Elementární příklady s kvantifikátory

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$
2. $\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y P(y) \wedge \forall y Q(y)$
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x \neg P(x)$
4. $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vdash \forall z(P(z) \vee Q(z))$
5. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$
6. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$
7. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$

Příklady s rovností

1. $P(a),\ \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$
2. $\forall x \forall y(x = y \Rightarrow R(x, y)) \vdash \forall x R(x, x)$

Vztah relativisovaných kvantifikátorů a negace

1. $\neg \exists x A(x) \wedge B(x) \dashv\vdash \forall x(A(x) \Rightarrow \neg B(x))$
2. $\neg \forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \dashv\vdash \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

„Existuje jediný“ ($\exists! x P(x)$) Dokažte, že sentence

1. $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y = x))$
2. $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$

jsou logicky ekvivalentní.

Paradox holiče Přemýšlejte nad následujícím známým paradoxem: holič z vesnice holí právě ty vesnické muže, kteří se neholí sami. Formalisujte dané tvrzení v predikátové logice (není třeba formalisovat predikát „být z vesnice“ ani „být mužem“) jako sentenci φ. Ukažte, že je dané tvrzení sporné. To jest, dokažte přirozenou dedukcí

$$\varphi \vdash \bot.$$