V každé úloze můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny zmíněné řetězce symbolů sentencemi.

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}\forall x(B(x) \Rightarrow (\exists y M(x,y) \Rightarrow \exists y M(y,x))),\\ \forall x(\exists y M(y,x) \Rightarrow M(x,x)),\\ \neg\exists x M(x,x)\\ \vdash \forall x(B(x) \Rightarrow \forall y \neg M(x,y))\end{aligned}$$

(*Všichni blonďatí milovníci jsou milováni. Všichni, kdo jsou milováni, milují sami sebe. Nikdo nemiluje sám sebe. Proto blonďatí nikoho nemilují.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}\forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x,y))),\\ \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))),\\ \forall x\forall y\forall z((V(x,y) \wedge V(y,z)) \Rightarrow V(x,z))\\ \vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))).\end{aligned}$$

(*Každý slon váží více než jakýkoli kůň. Nějaký kůň váží více než jakýkoli osel. Vážit více je transitivní vztah. Proto každý slon váží více než jakýkoli osel.*)

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí S splnitelná.

$$\begin{aligned}S = \{&\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge \neg P(x))),\\ &\forall x(\neg P(x) \Rightarrow \exists y(R(x,y) \wedge P(x))),\\ &\forall x\forall y\forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow \neg R(x,z)),\\ &\exists x\forall y R(x,y)\}.\end{aligned}$$

Pokud je S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 1 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x\exists y M(x,y),\ \forall x((\exists y M(y,x)) \Rightarrow \forall z M(x,z)) \vdash \forall x\forall y M(x,y)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$\begin{aligned}S = \{\forall x\forall y((\neg(x=y) \wedge M(x,y)) \Rightarrow \neg M(y,x)),\ \ \forall x M(a,x),\\ \exists y\forall z M(z,y),\ \ \exists x\exists y\neg(x=y)\}\end{aligned}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí splnitelná.

$$S = \{\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)),\ \ \exists z(P(z) \wedge Q(z))\}$$

Pokud je množina S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující sentence ϕ splnitelná.

$$\phi = \exists x \forall y(H(x, y) \Leftrightarrow \neg H(y, y))$$

Pokud je ϕ splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z ϕ spor.

Úloha 2 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\begin{aligned}
&\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y(R(x, y) \Rightarrow (\neg P(y) \wedge Q(y)))),\\
&\forall x \forall y((Q(x) \wedge R(x, y)) \Rightarrow (\neg Q(y) \wedge P(y))),\\
&\forall x(P(x) \vee Q(x))\\
\vdash &\neg \exists x \exists y((P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x, y))
\end{aligned}$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$P(b) \wedge Q(b),\ \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y = x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \forall y \forall z((P(y) \wedge P(z)) \Rightarrow y = z)$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující důsledek.

$$\forall x \exists y R(x, y),\ \neg \exists x \forall y R(x, y) \vdash \exists x \exists y \exists z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \wedge R(z, x))$$

Pokud důsledek platí, proveďte důkaz přirozenou dedukcí. Pokud ne, sestrojte interpretaci, která to ukazuje.

Úloha 3 (10 bodů) Rozhodněte, zda je následující množina sentencí S splnitelná.

$$\begin{aligned}
S = \{&\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(x, y) \wedge \neg P(y))),\\
&\forall x(\neg P(x) \Rightarrow \exists y(R(x, y) \wedge P(y))),\\
&\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow \neg R(x, y)),\\
&\exists z \neg P(z)\}.
\end{aligned}$$

Pokud je S splnitelná, sestrojte její model. Pokud není splnitelná, odvoďte přirozenou dedukcí z S spor.

Úloha 4 (10 bodů) **1 bod** Sestrojte prostý graf se 4 vrcholy, každý vrchol má stupeň 2, a nejkratší kružnice v něm má délku 4 (obsahuje 4 hrany).

1 bod Sestrojte prostý graf s 6 vrcholy, každý vrchol má stupeň 3, a nejkratší kružnice v něm má délku 4 (obsahuje 4 hrany).

8 bodů Sestrojte pro každé přirozené $k \geq 4$ prostý graf, který má $2k$ vrcholů, každý vrchol má stupeň k, a nejkratší kružnice v něm má délku 4 (obsahuje 4 hrany). (*Pečlivě popište strukturu grafu. Pojmenujte vrcholy a precisně popište, které dvojice vrcholů jsou spojeny hranou. Důkladně argumentujte, že ve vašem grafu nejsou kružnice délky kratší než* 4.)

Úloha 4 (10 bodů) V této úloze se zabýváme neorientovanými (neohodnocenými) grafy.

3 body Jaká je maximální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v úplném bipartitním grafu $K_{m,n}$ (v závislosti na $m, n > 0$)?

4 body Graf G je souvislý, (ne nutně úplný) bipartitní graf, má n vrcholů. Jaká v něm může být nejvýše maximální vzdálenost mezi dvěma vrcholy?

3 body Jaká je maximální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v kružnici C_n (v závislosti na $n > 2$)?

Úloha 4 (10 bodů) Pro neorientovaný graf G řekneme, že podmnožina $C \subseteq E$ jeho hran *řeže* G, pokud odstraněním všech hran z C vznikne graf s vyšším počtem komponent souvislosti.

2 body Je v každém grafu G nějaká podmnožina $C \subseteq E$ jeho hran, která ho řeže? Nebo existuje nějaký „nerozřezatelný“ graf?

4 body Kolik hran (v závislosti na n) má nejmenší množina hran $C \subseteq E$, která řeže úplný graf K_n?

4 body Kolik hran (v závislosti na n) má nejmenší množina hran $C \subseteq E$, která řeže úplný graf K_{2n} (který má $2n$ vrcholů) na dvě stejně velké komponenty souvislosti (mající obě n vrcholů)?

Úloha 4 (10 bodů) **4 body** Sestrojte dva neisomorfní grafy o sedmi vrcholech, ve kterých mají všechny vrcholy stupeň 2.

6 bodů Lze sestrojit čtyři neisomorfní grafy o osmi vrcholech, ve kterých mají všechny vrcholy stupeň 2? Pokud ano, sestrojte. Pokud ne, podrobně vysvětlete.

Úloha 5 (10 bodů) Dokažte, že v každém stromu s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva vrcholy stupně 1.

Úloha 5 (10 bodů) V této úloze se zabýváme neorientovanými 2-*regulárními grafy* (grafy, v nichž mají všechny vrcholy stupeň 2).

4 body Kolik nejvýše komponent souvislosti může mít prostý 2-regulární graf bez smyček?

3 body Kolik nejvýše komponent souvislosti může mít 2-regulární graf bez smyček? (Paralelní hrany jsou povoleny.)

3 body Kolik nejvýše komponent souvislosti může mít 2-regulární graf? (Paralelní hrany a smyčky jsou povoleny.)

Úloha 5 (10 bodů) Kolik nejvýše hran může obsahovat orientovaný graf H o n vrcholech, který lze topologicky očíslovat? Pro každé kladné přirozené n takový graf podrobně popište.

Úloha 5 (10 bodů) Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Existuje graf, který má přesně dvě kostry.

Pokud tvrzení platí, nalezněte příklad takového grafu. Pokud tvrzení neplatí, dokažte.

Úloha 6 (10 bodů) V neorientovaném grafu nazveme hranu e *mostem*, pokud se po jejím odstranění z grafu zvýší počet komponent souvislosti.

1 bod Sestrojte souvislý nediskrétní graf, který neobsahuje žádný most.

1 bod Sestrojte souvislý nediskrétní graf se čtyřmi vrcholy, ve kterém je každá hrana mostem.

2 bod Sestrojte graf, který obsahuje kružnici a most.

6 bodů Dokažte či vyvraťte následující tvrzení. Pro každý neorientovaný graf G a každou jeho hranu e platí: pokud je e obsažena v nějaké kružnici, pak to není most.

Úloha 6 (10 bodů) Graf G lze vyjádřit jako sjednocení dvou grafů A a B, jejichž průnikem je kružnice délky 3 (trojúhelník). Graf A i graf B mají barevnost 4. Lze čtyřmi barvami nutně obarvit i graf G? (Pokud ano, dokažte. Pokud ne, sestrojte trojici grafů A, B, G sloužící jako protipříklad.)

Úloha 6 (10 bodů) Hranu e v neorientovaném grafu G nazveme *mostem*, pokud jejím odstraněním vznikne graf s vyšším počtem komponent souvislosti. Rozhodněte, zda eulerovský graf může obsahovat most. Pokud ano, sestrojte takový graf. Pokud ne, dokažte.

Úloha 6 (10 bodů) Dokažte, že každý orientovaný acyklický graf obsahuje nějaký vrchol v, pro který platí

$$d^{out}(v) = 0.$$

(*Značením* $d^{out}(v)$ *se myslí takzvaný výstupní stupeň vrcholu* v.)