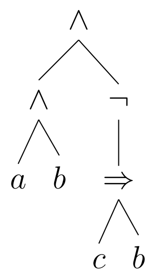
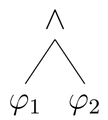
Úloha 1 (1 bod) Zakreslete syntaktický strom následující formule φ výrokové logiky:

$$\varphi = ((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \wedge (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$$

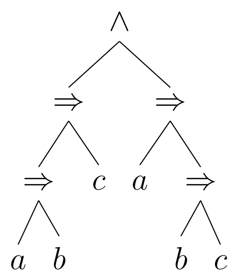
Zapište formuli ψ výrokové logiky danou následujícím syntaktickým stromem:



Myšlenky při řešení Zde není třeba moc přemýšlet, v obou částech příkladu mi stačí postupovat podle jednoduchého algoritmu. Formule φ má jako hlavní spojku konjunkci ($\wedge$). To znamená, že je tvaru $\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Tvorbu syntaktického stromu tedy začnu takto:



Místo φ_1 a φ_2 by ale měly být zakresleny syntaktické stromy formulí $\varphi_1 = ((a \Rightarrow b) \Rightarrow c)$ a $\varphi_2 = (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$. Stačí tedy nalézt hlavní spojky těchto formulí a postupovat rekursivně. Výsledný syntaktický strom formule φ je



Formuli ψ máme zadanou syntaktickým stromem. Zde nemusíme složitě hledat hlavní spojku, stačí se podívat do kořene syntaktického stromu, kde je spojka $\wedge$. Formule ψ je tedy tvaru $\psi_1 \wedge \psi_2$. Abych zjistil, co je ψ_1 a ψ_2, stačí se mi podívat na levý a pravý podstrom příslušný kořeni daného syntaktického stromu. Postup má zase rekursivní charakter, odhalím tedy, že $\psi_1 = a \wedge b$ a $\psi_2 = \neg(c \Rightarrow b)$. Proto je ψ formule $(a \wedge b) \wedge \neg(c \Rightarrow b)$.

Úloha 2 (1 bod) Rozhodněte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou splnitelné:

1. $(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \vee b)$.
2. $\neg(\neg a \vee \neg(b \wedge c))$.
3. $(a \vee b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$.
4. $((a \vee b) \vee c) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.
5. $\bot \vee (a \Rightarrow \bot)$.

Myšlenky při řešení Nejdříve si připomenu, co je splnitelnost formule výrokové logiky. Formule φ je *splnitelná*, pokud je v nějakém pravdivostním ohodnocení *pravdivá*. K tomu, abych rozhodl, že je φ splnitelná, mi tedy stačí najít jedno konkrétní ohodnocení u, pro které platí $u(\varphi) = 1$. Naopak, abych ukázal, že φ splnitelná *není*, musím zkontrolovat všechna pravdivostní ohodnocení a ukázat, že v nich *není pravdivá*. Přímočarý postup by byl sestrojit pravdivostní tabulku. Všechny formule ze zadání obsahují maximálně tři různé atomické formule, takže by tabulka měla osm řádků, což je snesitelné. Já si chci ušetřit práci, takže zkusím detekovat splnitelnost jinak.

1. První formule je konjunkce. Chtěl bych ohodnocení, ve kterém jsou pravdivé oba konjunkty. Pravý konjunkt je negace disjunkce, bude pravdivý jen v případě, kdy a i b bude ohodnoceno jako nepravdivé. Zkusím tedy ohodnocení u, pro které $u(a) = u(b) = 0$. Musím zkontrolovat, zda je v u pravdivý i levý disjunkt, implikace $a \Rightarrow b$. Pamatuji si pravdivostní tabulku pro implikaci, takže vím, že odpověď je *ano*. Celkově tedy: první formule je splnitelná.
2. Druhá formule je negace disjunkce: v hlavě si tuto formuli pomocí De Morganova zákona $\neg(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!\!\dashv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ převedu na sémanticky ekvivalentní formuli $\neg\neg a \wedge \neg\neg(b \wedge c)$, odstraním dvojité negace, a vidím, že mohu stejně tak řešit, zda je splnitelná formule $a \wedge (b \wedge c)$. Pravdivostní ohodnocení u se nabízí: $u(a) = u(b) = u(c) = 1$.
3. U třetí formule mohu použít podobný trik. Pravý konjunkt je sémanticky ekvivaletní formuli $a \vee b$, mohu se tedy ptát, zda je splnitelná formule $(a \vee b) \wedge (a \vee b)$, která je sémanticky ekvivaletní formuli $(a \vee b)$, a ta splnitelná je.
4. Hlavní spojka je implikace. Najdu ohodnocení, které ohodnotí předpoklad jako nepravdivý? Předpoklad je disjunkce třech atomických formulí, stačí každou ohodnotit jako nepravdivou. Celá formule je tedy splnitelná.
5. V hlavě provedu sémanticky ekvivalentní úpravy formule ze zadání:

$$\bot \vee (a \Rightarrow \bot) \models\!\!\!\!\dashv a \Rightarrow \bot \models\!\!\!\!\dashv \neg a,$$

formule $\neg a$ je splnitelná, a tedy i formule ze zadání je splnitelná.

Úloha 3 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}&\mathsf{Pred} = \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,\\ &\mathsf{Func} = \{f\}, ar(f) = 1,\\ &\mathsf{Kons} = \{a\}.\end{aligned}$$

Jsou dány formule predikátové logiky $\varphi = \forall x R(x, y)$ a $\psi = \exists y R(x, f(y))$ (kde x, y a z jsou proměnné). Dále je term s definován jako $f(f(x))$ a term t jako proměnná y. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Term t je volný pro proměnnou x ve formuli φ.
2. Term t je volný pro proměnnou y ve formuli φ.
3. Term t je volný pro proměnnou x ve formuli ψ.
4. Term t je volný pro proměnnou y ve formuli ψ.
5. Term s je volný pro proměnnou x ve formuli ψ.

Myšlenky při řešení

1. Formule φ neobsahuje žádné volné výskyty proměnné x, takže jakýkoli term pro x ve φ bude volný.

2. Po nahrazení volných výskytů proměnné y proměnnou y se φ nezmění, takže y je pro y ve φ volná.
3. Po nahrazení volných výskytů proměnné x proměnnou y v ψ vznikne formule $\exists y R(\mathbf{y}, f(y))$ (změna je vyznačena tučně). Daný výskyt proměnné y je vázaný – y tedy pro x v ψ *není* volná.
4. Proměnná y nemá v ψ volné výskyty, toto tvrzení je tedy okamžitě pravdivé.
5. Pokud nahradím volné výskyty proměnné x v ψ termem $f(f(x))$, získám formuli $\exists y R(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})), f(y))$ (změna vyznačena tučně). Vznikl mi nový výskyt proměnné x, ale je volný. Term $f(f(x))$ je tedy pro x ve formuli ψ volný.

Úloha 4 (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,\\ \mathsf{Func} &= \{f\}, ar(f) = 1,\\ \mathsf{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N}\\ [\![P]\!] &= \{0, 3, 12\}\\ [\![Q]\!] &= \{4 \cdot z \mid z \in \mathbb{N}\}\\ [\![R]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}\\ [\![f]\!] &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\ & n \mapsto n + 5\\ [\![a]\!] &= 2\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow P(x))$.
2. $\exists x R(a, x)$.
3. $\exists x (P(x) \land \forall y (Q(y) \Rightarrow R(x, y)))$.
4. $\forall x \exists y (R(x, y) \land P(f(x)))$.
5. $\exists y \forall x (Q(x) \Rightarrow R(y, f(x)))$.

Myšlenky při řešení Než začnu řešit pravdivost sentencí ze zadání, prozkoumám interpretaci I.

- $U = \mathbb{N}$ znamená, že se zabývám přirozenými čísly.
- Predikátový symbol P kóduje vlastnost „být číslo 0, 3 nebo 12“.
- Predikátový symbol Q kóduje vlastnost „být násobkem čtyřky“, být dělitelný čtyřmi.
- Predikátový symbol R kóduje vztah „být ostře menší než“,
- Funkční symbol f kóduje funkci „přičítání pětky“,
- Konstantní symbol a odkazuje na číslo 2.

Při řešení si vždy přeložím danou sentenci do přirozeného jazyka tak, abych rozuměl tomu, co v mé intepretaci I tvrdí.

1. Ať si vezmu jakákoli dvě přirozená čísla n a m taková, že $n < m$, pak je n buď 0, 3, nebo 12. To zjevně není pravda.
2. Nějaké přirozené číslo je větší než 2. To zjevně pravda je.
3. Některé z čísel 0, 3, 12 (označím ho n) má tu vlastnost, že každé přirozené číslo m dělitelné čtyřmi je větší než n. To není pravda: Pro 12 mohu vybrat třeba 8 (číslo osm je dělitelné čtyřmi, ale není větší než dvanáct), pro 3 mohu vybrat 0 (nula je také dělitelná čtyřmi, ale není větší než tři), a pro 0 mohu ostatně také vybrat 0 (nula není *ostře* větší než nula).
4. Ke každému přirozenému číslu n existuje přirozené číslo m, které je větší, a navíc má číslo $n + 5$ tu vlastnost, že je to 0, 3, nebo 12. To není pravda: vezměme si třeba přirozené číslo 4. Číslo $4 + 5$ (tedy 9) není ani 0, ani 3, ani 12.
5. Existuje přirozené číslo m s tou vlastností, že pro každé přirozené n, které je dělitelné čtyřmi, je $m < n + 5$. To je pravda, mohu si zvolit například $m = 0$.

Úloha 5 (2 body) Neorientovaný graf G je dán šestiprvkovou množinou vrcholů $V = \{a, b, c, x, y, z\}$ a množinou hran, která je popsána následujícím seznamem:

hrana	$\{a, b\}$	$\{a, x\}$	$\{a, z\}$	$\{b, c\}$	$\{b, x\}$	$\{c, y\}$	$\{c, z\}$

Rozhodněte, která tvrzení o grafu G platí:

1. G je souvislý.
2. G je eulerovský.
3. G má barevnost 2.
4. G neobsahuje kružnice.
5. G obsahuje nějakou tříprvkovou nezávislou množinu vrcholů.

Myšlenky při řešení Graf je malý, nakreslím si ho a zkusím o jeho vlastnostech rozhodnout zkoumáním obrázku.

1. Že je G souvislý, vidím na první pohled.
2. Že G není eulerovský, vidím z toho, že ne každý vrchol má sudý stupeň.
3. Že G nemá barevnost 2, vidím z toho, že obsahuje trojúhelník (určený vrcholy a, b a x).
4. Že G *obsahuje* kružnici, vidím z toho, že obsahuje trojúhelník.
5. Vidím, že y a z tvoří dvouprvkovou nezávislou množinu vrcholů, a druhým pohledem vidím, že není maximální: mohu přidat i vrchol b a množina $\{b, y, z\}$ bude stále nezávislá. Graf G tedy obsahuje tříprvkovou nezávislou množinu vrcholů.

Úloha 6 (2 body) Je dán orientovaný graf H, o kterém víte jen to, že je acyklický a že má 7 vrcholů. Která z následujících tvrzení o něm nutně platí také?

1. H není silně souvislý.
2. H má alespoň 6 hran.
3. H je (brán jako neorientovaný graf) souvislý.

4. H obsahuje nějaký vrchol v, pro který platí $d_{out}(v) = 0$.
5. H obsahuje nějaký vrchol u, pro který platí $d_{in}(u) > 0$.

Myšlenky při řešení Vidím, že v zadání je graf H specifikovaný dvěma vlastnostmi: má 7 vrcholů a je acyklický. To není dost vlastností, které by H specifikovaly jednoznačně. Co to znamená? Grafů, které splňují vlastnosti ze zadání, je více. Když se zadání ptá, která z tvrzení o H nutně platí, zjistím, zda dané tvrzení plyne už přímo ze specifikovaných vlastností, nebo zda existuje graf, který vlastnosti ze zadání splňuje, ale tvrzení níže o něm neplatí.

1. Ano, H není silně souvislý. Má více než jeden vrchol (dokonce 7), a kdyby byl silně souvislý, určitě by obsahoval cyklus. Cykly ale H ze zadání neobsahuje.
2. Počet hran v H není specifikovaný, a sedmivrcholový acyklický graf, který má méně než 6 hran, existuje. Vezměne například diskrétní graf o sedmi vrcholech. (Diskrétní graf je graf neobsahující *žádné* hrany).
3. Už z předchozího tvrzení vidím, že diskrétní graf splňuje specifikaci, a přitom není souvislý. Třetí tvrzení tedy neplatí.
4. Každý acyklický graf obsahuje vrchol, který je *zdroj*. Tedy to platí i pro H.
5. Toto tvrzení neplatí, což vidím znovu z příkladu diskrétního grafu. Tam má každý vrchol vstupní stupeň 0.