

# Teorie grafů

## Základní pojmy

# Obsah

## Neorientované grafy

Definice a stupně vrcholů

Podgrafy a isomorfismus grafů

Sledy, tahy a cesty, souvislý graf

# Neorientované grafy

## Definice č. 1

*Graf (= neorientovaný graf)*  $G$  je dvojice  $(V, E)$ , kde

- ▶  $V$  je neprázdná konečná množina, prvky nazýváme *vrcholy*,
- ▶  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ , její prvky nazýváme *hrany* (*neorientované*).

# Neorientované grafy

## Definice č. 1

*Graf (= neorientovaný graf)*  $G$  je dvojice  $(V, E)$ , kde

- ▶  $V$  je neprázdná konečná množina, prvky nazýváme *vrcholy*,
- ▶  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ , její prvky nazýváme *hrany* (*neorientované*).

Pokud je hrana  $e = \{u, v\}$ , kde  $u, v$  jsou vrcholy, pak říkáme, že  $u, v$  jsou koncové vrcholy hrany  $e$ , nebo že hrana  $e$  je incidentní s vrcholy (či spojuje vrcholy)  $u, v$ .

Hranu  $e = \{u, v\}$  někdy značíme jen  $e = uv$ .

# Neorientované grafy

## Speciální příklady grafů

- ▶ Graf o  $n$  vrcholech, ve kterém  $E = \binom{V}{2}$  je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ , tj. každé dva vrcholy jsou spojeny hranou, se nazývá *úplný graf*, značí se  $K_n$ .
- ▶ Graf, který nemá žádné hrany, se nazývá *diskrétní graf*.
- ▶ *Bipartitní graf* je graf, jehož množina vrcholů se dá rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny  $V_1, V_2$  tak, že každá hrana grafu má jeden koncový vrchol ve  $V_1$  a druhý ve  $V_2$ .
- ▶ Bipartitní graf, který obsahuje všechny možné hrany, se nazývá *úplný bipartitní graf*. Značí se  $K_{m,n}$ , kde  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$  jsou velikosti partit.

# Neorientované grafy

## Tvrzení

- ▶ Úplný graf  $K_n$  na  $n$  vrcholech má  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  hran.
- ▶ Úplný bipartitní graf  $K_{m,n}$ , má  $m \cdot n$  hran.

## Poznámka

Diskrétní graf je bipartitní, dokonce i jednovrcholový graf se považuje za bipartitní s jednou prázdnou paritou.

# Neorientované grafy

## Definice č. 2

*Neorientovaný graf*  $G$  je trojice  $(V, E, \varepsilon)$ , kde

- ▶  $V$  je neprázdná konečná množina *vrcholů*,
- ▶  $E$  je konečná množina *neorientovaných hran*,
- ▶  $\varepsilon$  je přiřazení, které každé hraně  $e \in E$  přiřazuje množinu  $\{u, v\}$ , kde  $u, v \in V$ , a nazývá se *vztah incidence*.

# Neorientované grafy

## Definice č. 2

*Neorientovaný graf*  $G$  je trojice  $(V, E, \varepsilon)$ , kde

- ▶  $V$  je neprázdná konečná množina *vrcholů*,
- ▶  $E$  je konečná množina *neorientovaných hran*,
- ▶  $\varepsilon$  je přiřazení, které každé hraně  $e \in E$  přiřazuje množinu  $\{u, v\}$ , kde  $u, v \in V$ , a nazývá se *vztah incidence*.

Tato definice dovoluje i paralelní hrany (rozlišuje je jmény hran) a smyčky (tj. hrany, pro něž  $\varepsilon(e) = \{u\}$ ).



# Neorientované grafy

## Úmluva

Z pohledu definice č. 2 se grafy bez paralelních hran nazývají *prosté grafy*. Hrany v prostém grafu pak můžeme jednoznačně označit pomocí jejich koncových vrcholů.

Grafy splňující definici č. 1 jsou pak prosté grafy bez smyček, budeme jim říkat též *obyčejné grafy*.

Nebude-li řečeno jinak, budeme používat definici č. 1 a graf pro nás bude obyčejný neorientovaný graf, tedy dvojice  $G = (V, E)$ .

# Neorientované grafy

## Definice

*Stupeň vrcholu*  $v$  je počet hran, které jsou incidentní s vrcholem  $v$ , značí se  $d(v)$ , anebo  $\deg(v)$ .

Pozn.: V obecném grafu  $G = (V, E, \varepsilon)$  se případná smyčka  $\varepsilon(e) = \{v\}$  počítá do stupně  $d(v)$  dvakrát.

# Neorientované grafy

## Definice

*Stupeň vrcholu*  $v$  je počet hran, které jsou incidentní s vrcholem  $v$ , značí se  $d(v)$ , anebo  $\deg(v)$ .

Pozn.: V obecném grafu  $G = (V, E, \varepsilon)$  se případná smyčka  $\varepsilon(e) = \{v\}$  počítá do stupně  $d(v)$  dvakrát.

## Tvrzení (Handshaking lemma)

Pro každý graf  $G$  platí  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ .

## Důsledek

Každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

# Neorientované grafy

## Speciální příklady grafů

Graf  $G$  nazveme *regulární* (nebo přesněji  *$r$ -regulární*), pokud mají všechny jeho vrcholy stejný stupeň (přesněji stupeň  $r$ ).

# Neorientované grafy

## Speciální příklady grafů

Graf  $G$  nazveme *regulární* (nebo přesněji  *$r$ -regulární*), pokud mají všechny jeho vrcholy stejný stupeň (přesněji stupeň  $r$ ).

## Pozorování

- ▶ Úplný graf  $K_n$  je  $(n - 1)$ -regulární.
- ▶ Úplný bipartitní graf  $K_{m,n}$  je regulární právě tehdy, když  $m = n$ .
- ▶ Pro  $n$  i  $r$  lichá čísla neexistuje  $r$ -regulární graf na  $n$  vrcholech.

# Neorientované grafy

## Definice

Je dán obyčejný neorientovaný graf  $G = (V, E)$ .

- ▶ **Podgraf** grafu  $G$  je graf  $G' = (V', E')$ , kde  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  (tj. pro každou hranu  $e = \{u, v\} \in E'$  jsou její koncové vrcholy  $u, v \in V'$ , aby  $G'$  byl graf).
- ▶ Podgraf  $G' = (V', E')$  je **faktor grafu**  $G$ , jestliže obsahuje všechny vrcholy tohoto grafu, tj.  $V' = V$ .
- ▶ Podgraf  $G' = (V', E')$  je **podgraf indukovaný množinou  $V'$** , jestliže množina  $E'$  obsahuje všechny hrany grafu  $G$ , které mají oba krajní vrcholy v množině  $V'$ .

# Neorientované grafy

## Příklad

Nechť graf  $G = K_5$  je úplný graf na vrcholech  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- ▶ Podgraf indukovaný množinou  $V' = \{1, 2, 3, 4\}$  je  $K_4$  (vyhodili jsme vrchol  $v = 5$  a hrany s ním spojené).
- ▶ Diskrétní graf na pěti vrcholech a kružnice délky pět, tj. graf  $C_5 = (V, E' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\})$ , jsou faktory grafu  $G$  (vyhodili jsme jen některé hrany).
- ▶ Kružnice délky čtyři, tj. graf  $C_4 = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\})$ , je podgraf grafu  $G$  (vyhodili jsme vrchol  $v = 5$  a hrany s ním spojené a ještě některé další hrany).

# Neorientované grafy

## Definice

Dva obyčejné neorientované grafy  $G_1 = (V_1, E_1)$  a  $G_2 = (V_2, E_2)$  jsou *isomorfní grafy*, jestliže existuje bijekce  $f: V_1 \rightarrow V_2$  tak, že

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \text{právě tehdy, když} \quad \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$



# Neorientované grafy

## Speciální příklady grafů

- ▶ Necht'  $n \geq 0$ . *Cesta* (délky  $n$ ) je graf isomorfní grafu s množinou vrcholů  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  a s množinou hran  $E = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ . Značíme ji  $P_n$ .
- ▶ Necht'  $n \geq 3$ . *Kružnice* (délky  $n$ ) je graf isomorfní grafu s množinou vrcholů  $V = \{1, \dots, n\}$  a s množinou hran  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ . Značíme ji  $C_n$ .

# Neorientované grafy

## Speciální příklady grafů

- ▶ Necht'  $n \geq 0$ . **Cesta** (délky  $n$ ) je graf isomorfní grafu s množinou vrcholů  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  a s množinou hran  $E = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ . Značíme ji  $P_n$ .
- ▶ Necht'  $n \geq 3$ . **Kružnice** (délky  $n$ ) je graf isomorfní grafu s množinou vrcholů  $V = \{1, \dots, n\}$  a s množinou hran  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ . Značíme ji  $C_n$ .

Délka cesty  $P_n$  je počet hran v této cestě, značíme  $\text{len}(P_n) = n$ .

# Neorientované grafy

## Poznámky

- ▶ Jednovrcholový graf bez hran je *triviální cesta* délky nula.
- ▶ Kružnice coby obyčejný graf má délku  $n \geq 3$ .  
Jednovrcholový graf bez hran se nepovažuje za kružnici!
- ▶ Pro obecný graf lze, s mírnou úpravou definice, uvažovat o kružnici délky  $n = 1$  (hrana je smyčka), nebo délky  $n = 2$  (hrany jsou paralelní).

# Neorientované grafy

## Definice

- ▶ *Sled* (délky  $k$ ) v grafu  $G$  je posloupnost vrcholů a hran  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$  taková, že hrana  $e_i$  je incidentní s vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- ▶ Sled je *uzavřený sled*, jestliže  $v_0 = v_k$ .
- ▶ *Triviální sled* je sled, který obsahuje jediný vrchol a žádnou hranu.

V obyčejném grafu je sled jednoznačně určen posloupností vrcholů  $v_0, v_1, \dots, v_k$  (můžeme zapsat jako  $v_0 - v_1 - \dots - v_k$  se "znázorněním hran").

# Neorientované grafy

## Definice

- ▶ *Tah* v grafu  $G$  je sled, ve kterém se neopakují hrany.
- ▶ *Uzavřený tah* je uzavřený sled, ve kterém se neopakují hrany.
- ▶ *Cesta* v grafu  $G$  je tah, ve kterém se neopakují vrcholy.
- ▶ *Kružnice* v grafu  $G$  je uzavřený tah s alespoň jednou hranou, ve kterém se neopakují vrcholy s výjimkou  $v_0 = v_k$ .

# Neorientované grafy

## Definice

- ▶ *Tah* v grafu  $G$  je sled, ve kterém se neopakují hrany.
- ▶ *Uzavřený tah* je uzavřený sled, ve kterém se neopakují hrany.
- ▶ *Cesta* v grafu  $G$  je tah, ve kterém se neopakují vrcholy.
- ▶ *Kružnice* v grafu  $G$  je uzavřený tah s alespoň jednou hranou, ve kterém se neopakují vrcholy s výjimkou  $v_0 = v_k$ .

## Poznámka

Triviální sled je (uzavřený) tah i cesta, není to však kružnice.

# Neorientované grafy

## Poznámka

Alternativně jsme mohli definovat cestu v grafu  $G$  jako podgraf grafu  $G$ , který je cestou (tedy grafem  $P_t$  pro nějaké  $t \geq 0$ ) a kružnici v grafu jako podgraf, který je kružnicí (tedy grafem  $C_t$  pro nějaké  $t \geq 1$ ).

Budeme obě definice používat dle potřeby - cesta či kružnice v grafu pro nás bude jak posloupností vrcholů a hran, tak podgrafem skládajícím se z těchto vrcholů a hran.

# Neorientované grafy

## Lemma (o zkrácení na cestu)

Pokud v grafu  $G$  existuje sled z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ , pak v něm existuje i cesta z  $u$  do  $v$ , která není delší než daný sled.

## Definice

Graf  $G$  je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje cesta.

## Tvrzení

Graf  $G$  je souvislý právě tehdy, když mezi každými dvěma vrcholy existuje sled.



# Neorientované grafy

## Definice

Každý maximální podgraf grafu  $G$ , který je souvislý, se nazývá *komponenta souvislosti* grafu  $G$ .

Poznámka: Maximální souvislý podgraf je zde myšleno ve smyslu inkluze, tj. přidáním libovolného vrcholu či hrany bychom porušili souvislost nebo by to přestal být podgraf.

## Poznámka

Komponenta souvislosti je jednoznačně určena množinou svých vrcholů, jedná se o podgraf indukovaný touto množinou vrcholů. Budeme komponenty souvislosti zapisovat pomocí množin jejích vrcholů (někdy i volně ztotožňovat s těmito množinami).

# Neorientované grafy

## Definice

*Relace dostupnosti* na vrcholech grafu  $G$  je definována takto:  
 $u \sim v$ , když v  $G$  existuje cesta z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ . Říkáme,  
že vrchol  $v$  je dostupný z vrcholu  $u$ .

# Neorientované grafy

## Definice

*Relace dostupnosti* na vrcholech grafu  $G$  je definována takto:  
 $u \sim v$ , když v  $G$  existuje cesta z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ . Říkáme,  
že vrchol  $v$  je dostupný z vrcholu  $u$ .

## Tvrzení

Relace dostupnosti je relací ekvivalence na množině všech vrcholů grafu  $G$ , třídy této ekvivalence jsou právě množiny vrcholů komponent souvislosti grafu  $G$ .

# Neorientované grafy

## Definice

Nechť  $G$  je souvislý graf. Délka nejkratší cesty z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  se nazývá *vzdálenost vrcholů*  $u$  a  $v$ . Značíme ji  $\text{dist}(u, v)$ .

# Neorientované grafy

## Definice

Nechť  $G$  je souvislý graf. Délka nejkratší cesty z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  se nazývá *vzdálenost vrcholů*  $u$  a  $v$ . Značíme ji  $\text{dist}(u, v)$ .

## Tvrzení

Vzdálenost vrcholů je metrikou na množině vrcholů souvislého grafu  $G = (V, E)$ . Tj. pro libovolné vrcholy  $u, v, w \in V$  platí:

- ▶  $\text{dist}(u, v) \geq 0$ , přitom rovnost nastane právě tehdy, když  $u = v$ ;
- ▶  $\text{dist}(u, v) = \text{dist}(v, u)$ ;
- ▶  $\text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, w) + \text{dist}(w, v)$ .

# Neorientované grafy

## Literatura

- ▶ J. Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, 2015.  
(Třetí vydání (2019) dostupné online.)
- ▶ J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, 2000.