Příkladová dávka č. 4

(k řešení mezi 9.4. – 23.4.)

Tato dávka příkladů slouží k procvičení interakce rovinné vlny s rovinným materiálovým rozhraním a k procvičení rozkladu pole do rovinných vln.

Úloha 1 (3 body)

Představte si nekonečně dlouhý proudovodič rovnoběžný s osou x a ležící v rovině xy. Nechť jím generovaná proudová hustota má tvar

$$\boldsymbol{J}\left(x,y,z,\omega\right) = -\mathbf{x}_0 \frac{E_0\left(\omega\right)}{kZ} \delta\left(y\right)\delta\left(z\right) \tag{1}$$

kde k je konstanta šíření, Z je vlnová impedance a E_0 je amplitudová konstanta s jednotkami elektrické intenity. Dále uvažte, že v rovinně $z = z_\mathrm{d} > 0$ leží materiálové rozhraní mezi materiály

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 10\varepsilon_0\left(1 - \mathrm{j}0.001\right), \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0\left(1 - \mathrm{j}0.001\right), \\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu_0, \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

kde index 1 platí pro $z < z_\mathrm{d}$ a index 2 platí pro $z > z_\mathrm{d}$. Vykreslete velikost elektrického pole v rovině yz. Implementujte výše uvedenou úlohu pomocí FFT algoritmu. Výsledek je zobrazen na Obr. 1.

Pozn. č. 1: Při provádění zpětné Fourierovy transformace je třeba dát pozor na člen $1/k_z$. Tuto singularitu lze odstranit fyzikálním předpokladem, že okolní prostředí je alespoň nepatrně ztrátové, tedy, že vlnové číslo k je komplexní (pozor na znaménka imaginárních částí k, k_z). V tomto domácím úkolu je to zaručeno ztrátovou permitivitou v obou oblastech.

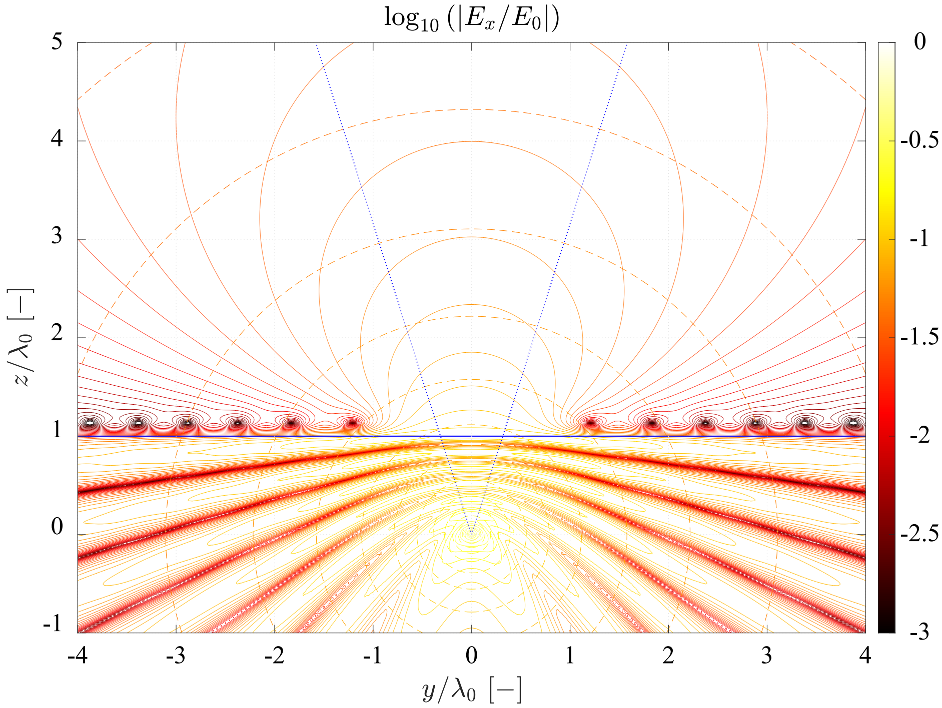
Pozn. č. 2: Lze dokázat následující identitu

$$\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k\sqrt{y^2+z^2}\right) = 2\mathcal{F}_{k_y}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z|z|}}{k_z}\right\}, \tag{3}$$

kde $\mathrm{H}_0^{(2)}\left(\xi\right)$ je Hankelova funkce nultého řádu a druhého druhu a $k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}$. Pokud tedy budou materiálové parametry obou prostředí shodné, úloha má analytické řešení. Tento fakt můžete použít k ověření funknosti numerického výpočtu.

Úloha 2 (2 body)

Uvažte experiment, ve kterém je skleněné akvárium naplněno vodou a je do něj vysypán cukr. Pokud se nechá tento systém ustálit, vznikne po několika hodinách v akváriu gradientní prostředí, které bude u dna mít hodně cukru



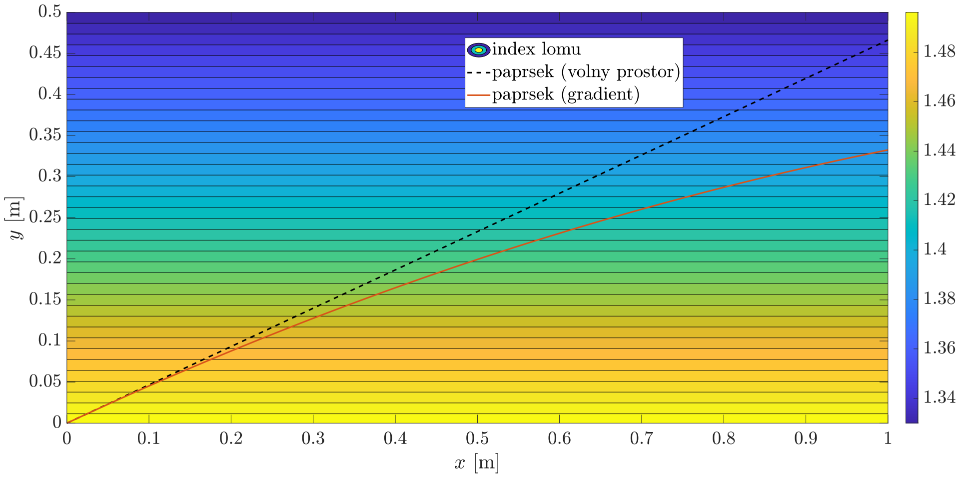
Obrázek 1: Normovaná intenzita elektrického pole (plné izokřivky). Plná modrá čára ukazuje rozhraní. Tečkované modré čáry ukazují kritický úhel. Čárkované izokřivky ukazují pole v případě, že by celý prostor byl vyplněn materiálem s indexem 1.

(index lomu na optických frekvencích $n \approx 1.55$) a u hladiny prakticky čistou vodu (index lomu na optických frekvencích $n \approx 1.33$). V případě, že bude souřadnice y měřit výšku od dna akvária, bude mít index lomu přibližně tvar $n(x, y, z) \approx 1.55 - y(1.55 - 1.33)/h$, kde h je výška hladiny. Představte si, že z venkovního prostředí dostanete do akvária laserový svazek, který s vodorovinou svírá určitý úhel. Zjistíte, že se svazek nebude šířit po přímce, nýbrž po křivce.

Úkolem je najít tuto křivku. Postupujte tak, že si index lomu rozdělíte na určitý konečný počet vrstev s konstantním indexem lomu. Šíření rovinné vlny v tomto systému umíte vyřešit Snellovým zákonem. Pokud bude počet vrstev nekonečný, bude se dokonce jednat o exaktní řešení. Uvažte jen jednu rovinou vlnu a vykreslete její trajektorii, viz. Obr. 2.

Pozn. č. 1: Úlohu lze vyřešit i jinak, viz. např. [1, 3.13].

Pozn. č. 2: Odrazy na jednotlivých vrstvách můžete zanedbat. V limitním



Obrázek 2: Výsledek úlohy pro případ, kdy směr šíření rovinné vlny svírá na počátku s hladinou úhel 25°.

případě skutečně nehomogenního prostředí by k žádným odrazům nedocházelo.

Literatura

[1] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering.* Wiley, May 2017.