Příkladová dávka č. 3

(k řešení mezi 25.3. – 8.4.)

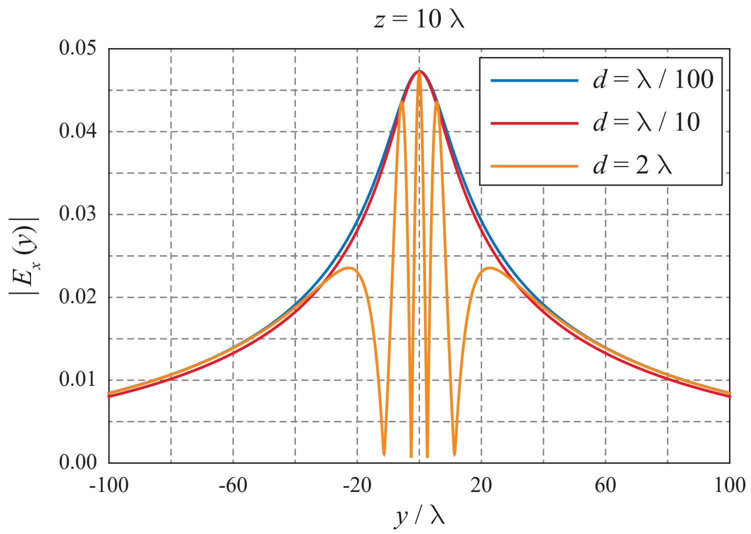
Tato dávka příkladů slouží k procvičení popisu elektromagnetického pole pomocí rozkladu do rovinných vln a popisu pole v zářivé oblasti zdroje.

Úloha 1 (3 body)

Představte si dva velmi tenké a nekonečně dlouhé proudovodiče rovnoběžné s osou x a ležící v rovině $x-y$. Nechť jimi generovaná proudová hustota má tvar

$$\boldsymbol{J}(x,y,z,\omega) = \mathbf{x}_0 I_0(\omega)\left[\delta\left(y-\frac{d}{2}\right)+\delta\left(y+\frac{d}{2}\right)\right]\delta(z)\,. \tag{1}$$

Určete obecný vztah pro elektrické pole v poloprostoru $z > 0$ generované tímto proudem. Pro výpočet použijte rozklad pole do rovinných vln. Za předpokladu harmonického časového průběhu a normalizace $I_0(\omega) = -1/(\omega\mu)$ vykreslete absolutní hodnotu elektrického pole v řezu $z = 10\lambda$. Vykreslení proveďte pro $d = 2\lambda, \lambda/10, \lambda/100$. Pro numerické výpočty nevyužívejte pozn. č. 2. Procvičte si numerickou implementaci Fourierovy transformace pomocí FFT algoritmu. Představte si, že byste výsledné pole z Obr. 1



Obrázek 1: Absolutní hodnota elektrického pole v řezu $z = 10\lambda$.

měřili (jak amplitudu, tak fázi) a snažili se použít vztahy z přednáškového slidu č. 41 opačně, tedy k rekonstrukci proudové hustoty (k rekonstrukci tvaru zdroje). Jednalo by se o jakousi mikroskopii. Obrázek 1 ukazuje, že pro $d < \lambda$, se vám rekonstrukce podaří jen teoreticky. Prakticky to možné nebude. Vysvětlete proč. Vysvětlete dále, co bychom měli udělat, abychom zrekonstruovali (abychom „viděli“) i zdroje s $d < \lambda$.

Výsledek:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left(x,y,z>0,\omega\right) &= -\omega\mu\boldsymbol{x}_0 I_0\left(\omega\right)\mathcal{F}_{k_y}^{-1}\left\{\cos\left(k_y\frac{d}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}}{k_z}\right\}\\ k_z &= \sqrt{k^2-k_y^2}\end{aligned} \tag{2}$$

Pozn. č. 1: Při provádění zpětné Fourierovy transformace je třeba dát pozor na člen $1/k_z$. Tuto singularitu lze odstranit fyzikálním předpokladem, že okolní prostředí je alespoň nepatrně ztrátové, tedy, že vlnové číslo k je komplexní (pozor na znaménka imaginárních částí k, k_z). Použití $k = k\left(1-\mathrm{j}10^{-3}\right)$ pro naše účely postačí.

Pozn. č. 2: Lze dokázat následující identitu

$$\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k\sqrt{y^2+z^2}\right) = 2\mathcal{F}_{k_y}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z|z|}}{k_z}\right\}, \tag{3}$$

kde $\mathrm{H}_0^{(2)}\left(\xi\right)$ je Hankelova funkce nultého řádu a druhého druhu. To znamená, že elektrické pole námi popisovaného systému lze také popsat jako

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left(x,y,z,\omega\right) = -\frac{\omega\mu_0\mathbf{x}_0 I_0\left(\omega\right)}{4}&\left[\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+z^2}\right)+\right.\\ &\left.\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+z^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Použitím superpozice můžeme dokonce říci, že proudová hustota

$$\boldsymbol{J}\left(x,y,z,\omega\right) = \mathbf{x}_0 K_0\left(y,\omega\right)\delta\left(z\right) \tag{5}$$

generuje elektrické pole

$$\boldsymbol{E}\left(x,y,z,\omega\right) = -\frac{\omega\mu_0}{4}\mathbf{x}_0\int\limits_{y'} K_0\left(y',\omega\right)\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y-y'\right)^2+z^2}\right)\mathrm{d}y'. \tag{6}$$

Tyto vztahy můžete použít pro ověření správnosti výpočtu pomocí FFT.