# Příkladová dávka č. 2

(k řešení mezi 12.3. – 26.3.)

Tato dávka příkladů slouží k procvičení popisu materiálových prostředí s časovou disperzí.

Na přednášce byl ukázán popis odezvy lineárních materiálů jak v časové, tak ve frekvenční oblasti. V případě pasivní isotropní elektrické susceptibility např. platí

$$\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_{\mathrm{e}}(\omega)\right) \boldsymbol{E}(\omega) \tag{1}$$

nebo ekvivalentně

$$\boldsymbol{D}(t) = \varepsilon_0 \left( \boldsymbol{E}(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_{\mathrm{e}}(\tau)\, \boldsymbol{E}(t-\tau)\, \mathrm{d}t \right). \tag{2}$$

Kauzalita a reálnost elektromagnetických polí pak omezuje možné formy susceptibility pouze na funkce, u kterých $\chi_{\mathrm{e}}(t<0) = 0$ a $\chi_{\mathrm{e}}^{*}(-\omega) = \chi_{\mathrm{e}}(\omega)$.

## Úloha 1 (1 bod)

Popište, proč z předchozích předpokladů vyplývá, že susceptibilita $\chi_{\mathrm{e}}(\omega)$ je analytickou funkcí v dolní polorovině komplexní proměnné $\omega = \mathrm{Re}\{\omega\} + \mathrm{j}\mathrm{Im}\{\omega\}$ včetně reálné osy.

## Úloha 2 (1 bod)

Určete časové průběhy elektrické susceptibility u následujících disperzních modelů:

- Lorentzův model: $\chi_{\mathrm{e}}(\omega) = \dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\Gamma}$
- Drudeův model $\chi_{\mathrm{e}}(\omega) = -\dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\Gamma)}$
- Debyeův model $\chi_{\mathrm{e}}(\omega) = \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{s}} - 1}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$

U těchto modelů ověřte, že platí $\chi_{\mathrm{e}}(t<0) = 0$ a $\chi_{\mathrm{e}}^{*}(-\omega) = \chi_{\mathrm{e}}(\omega)$ a tvrzení o analyticitě.

## Úloha 3 (1 bod)

Odvoďte tzv. Kramers-Kronigovu relaci

$$\chi_{\mathrm{e}}(\omega) = \mathrm{P.V.} \frac{\mathrm{j}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_{\mathrm{e}}(\mathit{\Omega})}{\mathit{\Omega} - \omega} \mathrm{d}\mathit{\Omega}, \tag{3}$$

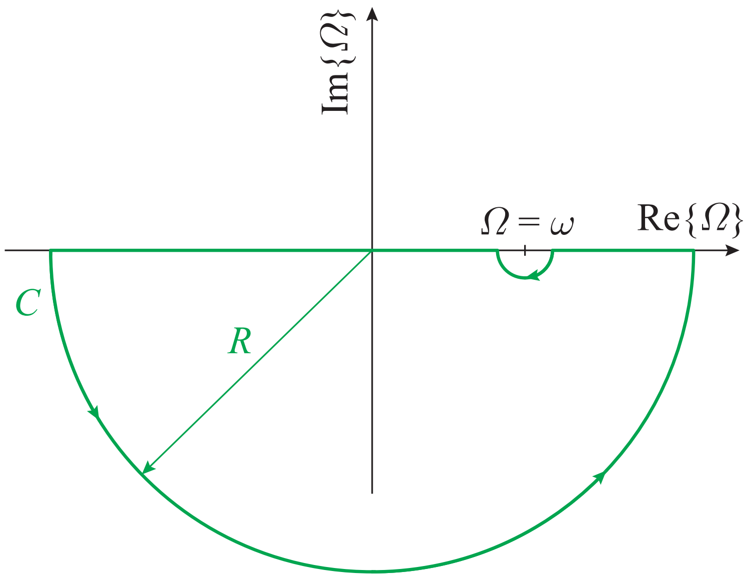
kde P.V. značí Cauchyho hlavní hodnotu integrálu, která svazuje spektrum reálné a imaginární části susceptibility takto

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\chi_{\mathrm{e}}\left(\omega\right)\right\} &= -\mathrm{P.V.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\left\{\chi_{\mathrm{e}}\left(\varOmega\right)\right\}}{\varOmega-\omega}\mathrm{d}\varOmega \\ \mathrm{Im}\left\{\chi_{\mathrm{e}}\left(\omega\right)\right\} &= \mathrm{P.V.}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\left\{\chi_{\mathrm{e}}\left(\varOmega\right)\right\}}{\varOmega-\omega}\mathrm{d}\varOmega\end{aligned} \tag{4}$$

Standardním postupem při odvození je použití Cauchyho integrálního teorému a integrálu

$$\oint\limits_{C}\frac{\chi_{\mathrm{e}}\left(\varOmega\right)}{\varOmega-\omega}\mathrm{d}\varOmega \tag{5}$$

na křivce dle Obr. 1 při $R \to \infty$ a při limitně nulovém poloměru půlkruhu kolem bodu $\varOmega = \omega$.




Obrázek 1: Křivka $C$ pro Cauchyův integrální teorém.

Pozn. č. 1: Kramers-Kronigova relace říká, že ztrátový materiál musí být i disperzní a naopak.

Pozn. č. 2: Rozmyslete, co Kramers-Kronigova relace říká o materiálech, které bychom běžně nazvali bezztrátové. Jako příklad lze vzít bezztrátový

Lorenzův model $\mathrm{Re}\left\{\chi_{\mathrm{e}}\left(\omega\right)\right\} = \dfrac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Jakou má tato susceptibilita imaginární část? Je nulová?

Pozn. č. 3: Kramers-Kronigova relace platí obecně pro všechny kauzální lineární systémy, např. pro obvodové impedance. Předchozí bezztrátový Lorenzův model by v tomto případě byl ekvivalentem impedance bezztrátového paralelního rezonančního obvodu $Z = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}} = \dfrac{\mathrm{j}\omega / C}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Rozmyslete, co říká Kramers-Kronigova relace o reálné a imaginární části této impedance.