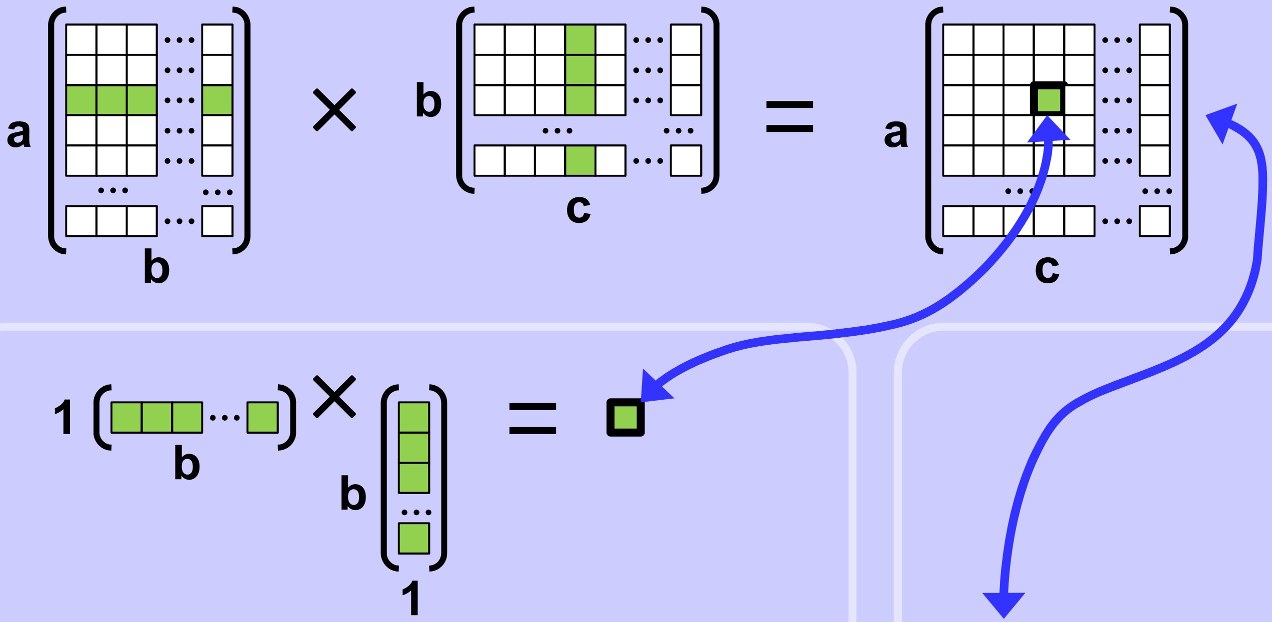
Optimální pořadí násobení matic

Počet operací v násobení dvou matic



b operací násobení pro výpočet jednoho prvku výsledné matice

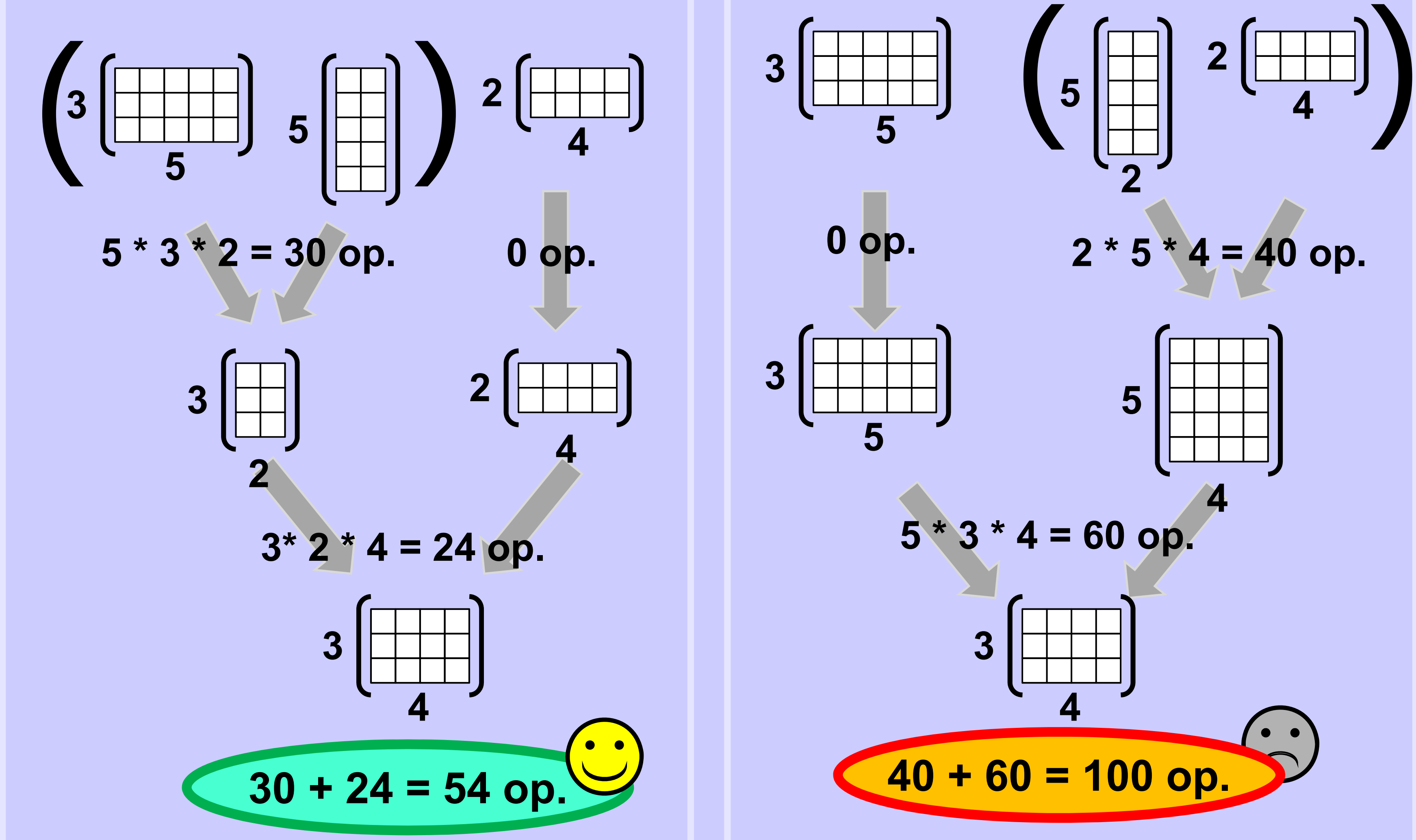
a * c prvků ve výsledné matici

Vynásobení dvou matic o rozměrech a×b a b×c vyžaduje celkem a * b * c operací násobení dvou prvků (čísel).

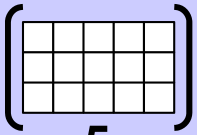
Sčítání zde neuvažujeme, lze pro něj vyvinout analogický postup.

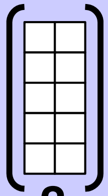
Optimální pořadí násobení matic

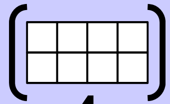
Příklad násobení více matic



Optimální pořadí násobení matic

$A_1 =$ 3  5

$A_2 =$ 5  2

$A_3 =$ 2  4

Součin $(A_1 \times A_2) \times A_3$ **vyžaduje 54 operace násobení .**

Součin $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ **vyžaduje 100 operací násobení.**

Evidentně, na způsobu uzávorkování záleží .

Catalanova čísla C_N

Součin $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_N$ **lze uzávorkovat**

C_N **= Comb(2N, N) / (N+1) způsoby.**

$C_1, C_2, \ldots, C_7, \ldots$ **= 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...** $C_N > 2^N$ **pro N > 7.**

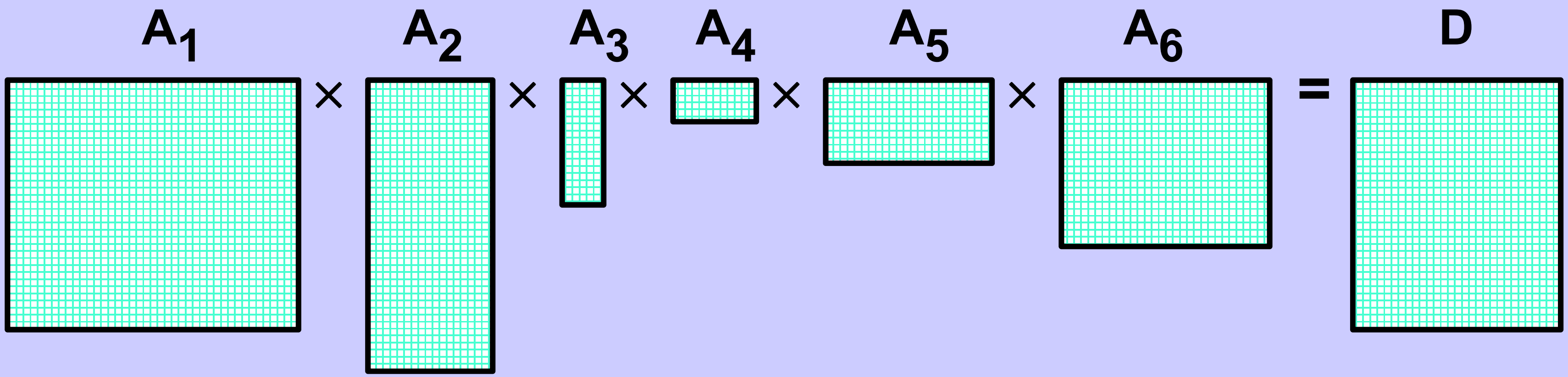
V obecném případě by mělo vyzkoušení všech uzávorkování exponenciální složitost.

Optimální pořadí násobení matic

Instance úlohy

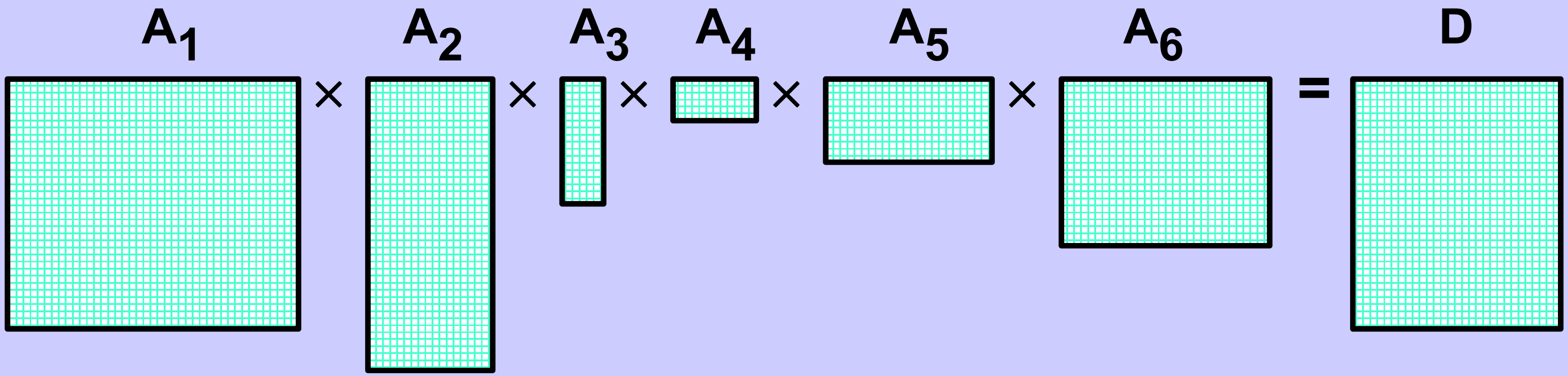
Máme spočítat co nejefektivněji součin reálných matic
$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$,
kde rozměry jednotlivých matic jsou po řadě
30×35, 35×15, 15×5, 5×10, 10×20, 20×25.
(Výsledná matice D má rozměr 30×20).

Grafická podoba (dimenze matic ve správném poměru)



Instance převzata z [CLRS], kap. 15.

Optimální pořadí násobení matic



Sledujeme jen počet operací součinu dvou reálných čísel.
Uvažujeme různé možnosti uzávorkování a tím i pořadí výpočtu.

metoda	Výraz	Počet operací
zleva doprava	$((((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4) \times A_5) \times A_6$	43 500
zprava doleva	$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times (A_4 \times (A_5 \times A_6))))$	47 500
nejhorší	$A_1 \times ((A_2 \times ((A_3 \times A_4) \times A_5)) \times A_6)$	58 000
nejlepší	$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$	15 125

Optimální pořadí násobení matic

$$A_1 \times (A_2 \times A_3 \times A_4 \; \dots \times A_{N-1} \times A_N)$$
$$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4 \; \dots \times A_{N-1} \times A_N)$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3) \times (A_4 \; \dots \times A_{N-1} \times A_N)$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) \times (\dots \times A_{N-1} \times A_N)$$
$$\dots$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots) \times (A_{N-1} \times A_N)$$
$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots \times A_{N-1}) \times A_N$$

N – 1 možných míst, v nichž výraz rozdělíme a provedeme poslední násobení

Předpokládejme, že máme předpočítáno optimální uzávorkování pro každý modrý úsek celkového výrazu.

Optimální pořadí násobení matic

$$A_1 \times (A_2 \times A_3 \times A_4 \;\dots\; \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,1] \times B[2,N]$$

$$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4 \;\dots\; \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,2] \times B[3,N]$$

$$(A_1 \times A_2 \times A_3) \times (A_4 \;\dots\; \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,3] \times B[4,N]$$

$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) \times (\dots \times A_{N-1} \times A_N) = B[1,4] \times B[5,N]$$

$$\dots \qquad\qquad \dots$$

$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots) \times (A_{N-1} \times A_N) = B[1,N-2] \times B[N-1,N]$$

$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots \times A_{N-1}) \times A_N = B[1,N-1] \times B[N,N]$$

Matice B[i, j] představuje výsledek vynásobení odpovídajícího úseku.

Nechť r(X) resp. s(X) představují počet řádků resp sloupců matice X.
Podle pravidel násobení matic platí
$r(B[i, j]) = r(A_i)$, $s(B[i, j]) = s(A_j)$, pro $1 \le i \le j \le N$.

Optimální pořadí násobení matic

Nechť MO[i, j] představuje minimální počet operací potřebných k výpočtu matice B[i, j], tj. minimální počet operací potřebných k výpočtu matice $A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_{j-1} \times A_j$.

B[1,1]	×	B[2,N]	$MO[1,1] + r(A_1)*s(A_1)*s(A_N) + MO[2, N]$
B[1,2]	×	B[3,N]	$MO[1,2] + r(A_1)*s(A_2)*s(A_N) + MO[3, N]$
B[1,3]	×	B[4,N]	$MO[1,3] + r(A_1)*s(A_3)*s(A_N) + MO[4, N]$
	. . .		
B[1,N-2]	×	B[N-1,N]	$MO[1,N-2] + r(A_1)*s(A_{N-2})*s(A_N) + MO[N-1, N]$
B[1,N-1]	×	B[N,N]	$\underbrace{MO[1,N-1]}_{\text{operací v levém úseku}} + \underbrace{r(A_1)*s(A_{N-1})*s(A_N)}_{\text{operací při násobení } B[1,.] \times B[.,N]} + \underbrace{MO[N, N]}_{\text{operací v pravém úseku}}$

Celkem dostáváme MO[1,N]:

$MO[1,N] = \min \{MO[1,k] + r(A_1)*s(A_k)*s(A_N) + MO[k+1, N] \mid k = 1..N-1\}$

Optimální pořadí násobení matic

$$MO[1,N] = \min \{MO[1,k] + r(A_1)*s(A_k)*s(A_N) + MO[k+1, N] \mid k = 1..N-1\}$$

Za předpokladu znalosti MO[i, j] pro úseky kratší než [1, N], lze řešení celé úlohy, tj. hodnotu MO[1, N], spočíst v čase $\Theta(N)$. (*)

Rekurentní využití řešení menších podúloh

Identické úvahy, jaké jsme provedli pro celý výraz

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_N ,$$

provedeme rovněž pro každý jeho souvislý úsek

$$\dots A_L \times A_{L+1} \times \dots \times A_{R-1} \times A_R \dots, \quad 1 \le L \le R \le N.$$

Počet těchto souvislých úseků je stejný jako počet dvojic indexů (L, R), kde $1 \le L \le R \le N$. Ten je roven Comb(N, 2) $\in \Theta(N^2)$.
Podúlohu na úseku (L, R) lze spočíst podle (*) v čase O(N), celou úlohu tak lze vyřešit v čase $O(N^3)$.

Optimální pořadí násobení matic

(*) $MO[L,R] = \min \{MO[L,k] + r(A_L)*s(A_k)*s(A_R) + MO[k+1,R] \mid k = L..R-1\}$

Hodnoty MO[L,R] ukládáme do 2D pole na pozici s indexy [L][R].

Při výpočtu MO[L,R] podle (*) používáme vesměs hodnoty MO[x,y], kde rozdíl y - x (odpovídající délce podvýrazu) je menší než rozdíl R - L.
Tabulku DP proto vyplňujeme v pořadí rostoucích rozdílů R - L.

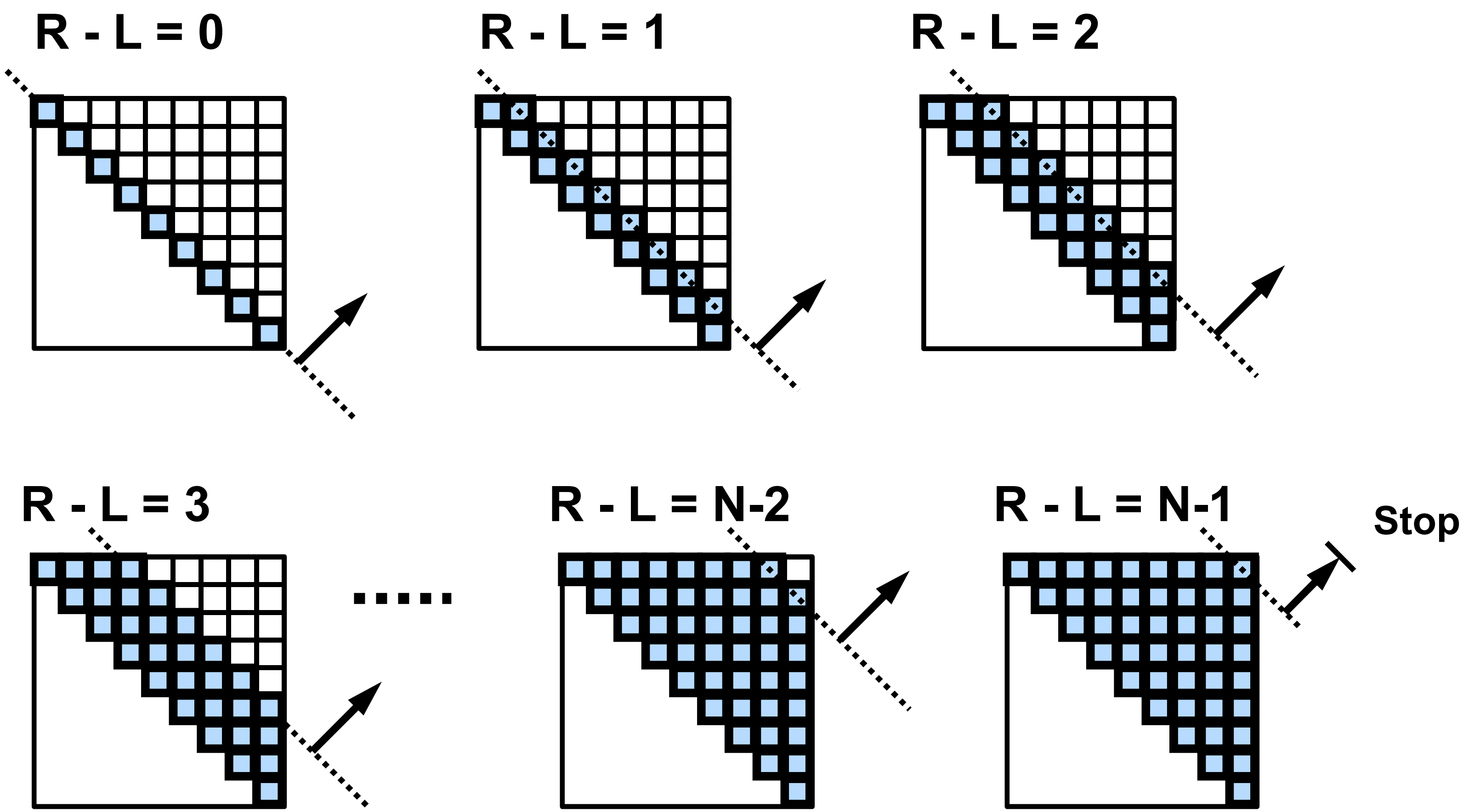
0. Vyplníme prvky s indexy[L][R], kde R-L = 0, to je hlavní diagonála.
1. Vyplníme prvky s indexy[L][R], kde R-L = 1, to je diagonála těsně nad hlavní diagonálou.
2. Vyplníme prvky s indexy[L][R], kde R-L = 2, to je diagonála těsně nad předchozí diagonálou.

...

N-1. Vyplníme prvek s indexem [L][R], kde R-L = N-1, to je pravý horní roh tabulky.

Optimální pořadí násobení matic

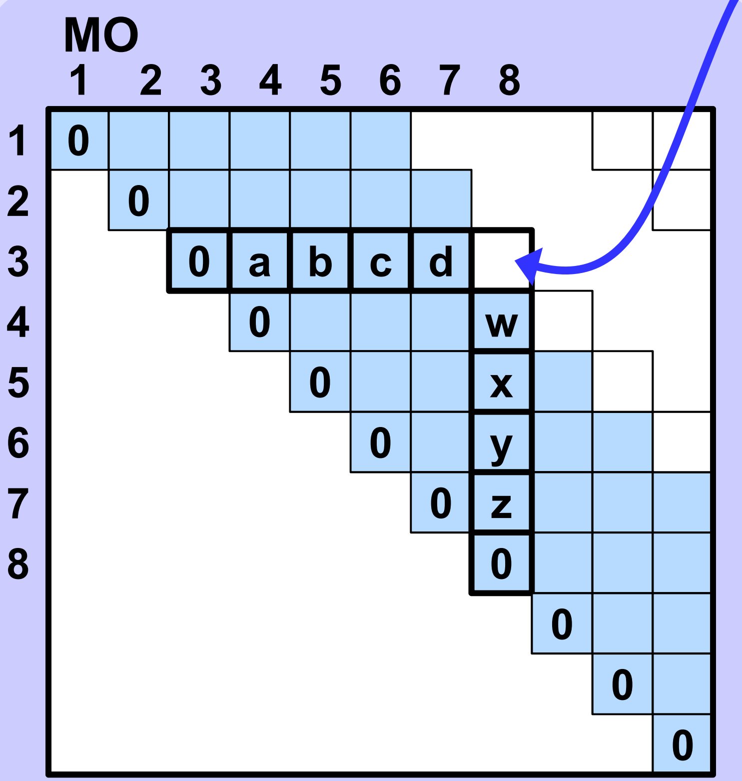
Schéma postupu výpočtu



Optimální pořadí násobení matic

$$MO[L,R] = \min \{MO[L,k] + r(A_L)*s(A_k)*s(A_R) + MO[k+1,R] \mid k = L..R-1\}$$

Ukázka postupu výpočtu



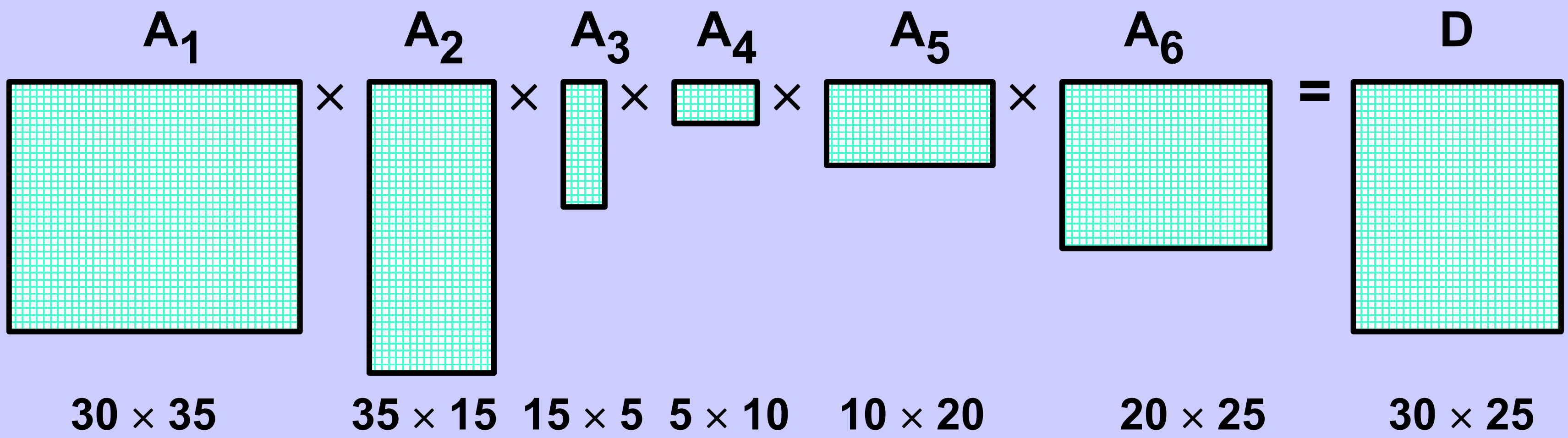
$MO[3,8] = \min \{$
$MO[3,3] + r(A_3)*s(A_3)*s(A_8) + MO[4,8],$
$MO[3,4] + r(A_3)*s(A_4)*s(A_8) + MO[5,8],$
$MO[3,5] + r(A_3)*s(A_5)*s(A_8) + MO[6,8],$
$MO[3,6] + r(A_3)*s(A_6)*s(A_8) + MO[7,8],$
$MO[3,7] + r(A_3)*s(A_7)*s(A_8) + MO[8,8]\}$

Označme $P[L, R] := r(A_L)*s(A_R)$. Potom

$MO[3,8] = \min \{$
$0 + s(A_3)*P[3,8] + w,$
$a + s(A_4)*P[3,8] + x,$
$b + s(A_5)*P[3,8] + y,$
$c + s(A_6)*P[3,8] + z,$
$d + s(A_7)*P[3,8] + 0\}.$

Optimální pořadí násobení matic

Instance úlohy



MO	1	2	3	4	5	6
1	0	15750	7875	9375	11875	15125
2	0	0	2625	4375	7125	10500
3	0	0	0	750	2500	5375
4	0	0	0	0	1000	3500
5	0	0	0	0	0	5000
6	0	0	0	0	0	0

optimum

Optimální pořadí násobení matic

Rekonstrukce uzávorkování

$$MO[L,R] = \min \{MO[L,k] + r(A_L)*s(A_k)*s(A_R) + MO[k+1,R] \mid k = L..R-1\}$$

Při určení MO[L,R] do rekonstrukční tabulky RT stejné velikosti jako MO zaneseme na pozici [L][R] hodnotu k, v níž minimum * nastalo.
Hodnota k určuje optimální rozdělení výrazu

$(A_L \times A_{L+1} \times \dots \times A_R)$

na dva menší optimálně uzávorkované výrazy

$(A_L \times A_{L+1} \times \dots \times A_k) \times (A_{k+1} \times A_{k+2} \times \dots \times A_R)$

Hodnota RT[1, N] určuje optimální rozdělení celého výrazu

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$

na první dva menší optimálně uzávorkované výrazy

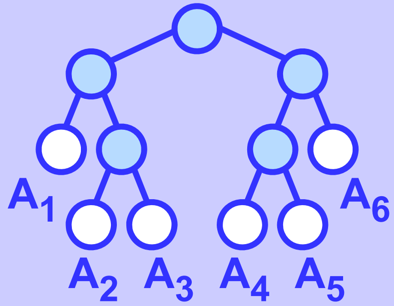
$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) \times (A_{k+1} \times A_{k+2} \times \dots \times A_N)$.

Dále rekonstrukce optimálního uzávorkování pokračuje rekurzivně analogicky pro výraz $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k)$ a pro výraz $(A_{k+1} \times A_{k+2} \times \dots \times A_N)$ a dále pro jejich podvýrazy atd.

Optimální pořadí násobení matic

RT

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	$\boxed{1}$	3	3	$\boxed{3}$
2	0	0	2	3	3	3
3	0	0	0	3	3	3
4	0	0	0	0	4	$\boxed{5}$
5	0	0	0	0	0	5
6	0	0	0	0	0	0

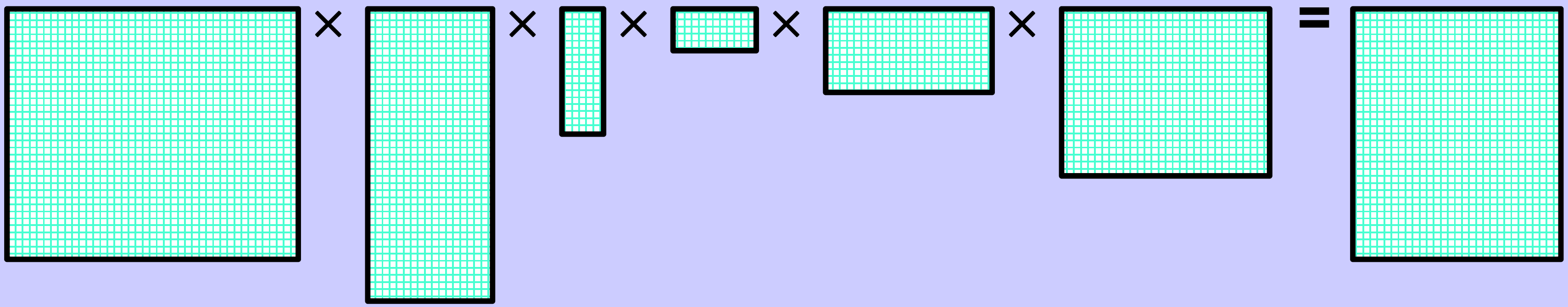


$A_1 \longleftrightarrow A_6$ $\quad A_1$

$A_1 \longleftrightarrow A_3 \times A_4 \longleftrightarrow A_6$

$A_1 \longleftrightarrow A_1 \times A_2 \longleftrightarrow A_3 \quad A_4 \longleftrightarrow A_5 \times A_6 \longleftrightarrow A_6$

$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times ((A_4 \times A_5) \times A_6)$ D

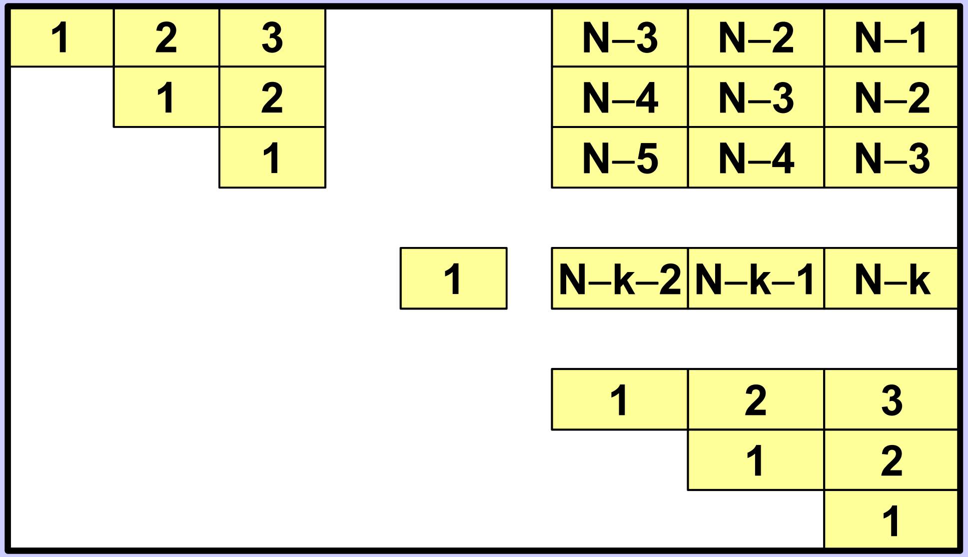


Optimální pořadí násobení matic

Odvození asymptotické složitosti

Počet buněk, z nichž je počítán obsah dané buňky v DP tabulce, je úměrný složitosti výpočtu obsahu této buňky.

index řádku	Řádkové součty
k = N–1	1/2 * (N–1) * N
k = N–2	1/2 * (N–2) * (N–1)
k = N–3	1/2 * (N–3) * (N–2)
k = k	1/2 * k * (k+1)
k = 3	1/2 * 3 * 4
k = 2	1/2 * 2 * 3
k = 1	1/2 * 1 * 2



Celkový součet

$$\frac{1}{2} * \sum_{k=1}^{N-1} k * (k+1) = \frac{1}{2} * \sum_{k=1}^{N-1} k^2 + \frac{1}{2} * \sum_{k=1}^{N-1} k$$

$$= \frac{1}{2} * (N-1) * N * (2N-1)/6 + \frac{1}{2} * (N-1) * N/2 \in \Theta(N^3)$$