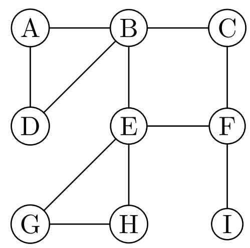
Průchod grafu

Jakub Černý, Ph.D.

email: `jacerny@gmail.com`,
texty ke studiu: `http://kam.mff.cuni.cz/~kuba/ka/`

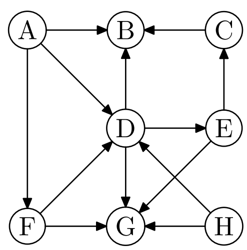
1. Graf na následujícím obrázku projděte pomocí průchodu do hloubky (DFS). Pokud si v některém kroku můžete vybrat z několika vrcholů, tak si vždy vyberte ten abecedně nejmenší z nich.

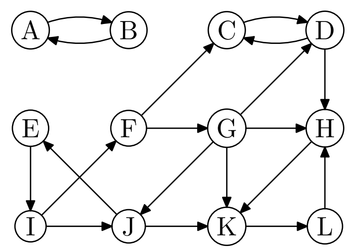


   (a) Rozdělte hrany na stromové a zpětné.

   (b) U každého vrcholu v spočítejte časy příchodu a odchodu – hodnoty $\texttt{in}[v]$ a $\texttt{out}[v]$.

2. Orientovaný graf na následujících obrázcích projděte pomocí průchodu do hloubky (DFS). Pokud si v některém kroku můžete vybrat z několika vrcholů, tak si vždy vyberte ten abecedně nejmenší z nich.





   (a) Rozdělte hrany na stromové a zpětné, příčné a dopředné.

   (b) U každého vrcholu v spočítejte časy příchodu a odchodu – hodnoty $\texttt{in}[v]$ a $\texttt{out}[v]$.

   (c) Najděte topologické uspořádání každého z grafů.

   (d) Vyznačte, které vrcholy jsou zdroje a které stoky.

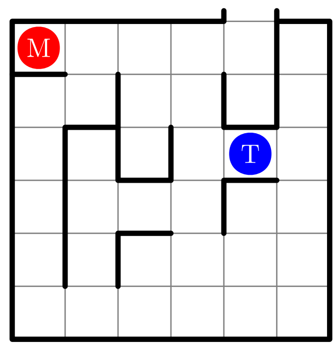
3. (Cesta tunelem) Rodina tvořená tatínkem, maminkou, dcerou a synem chce projít tunelem. Tatínek projde tunelem za jednu minutu, maminka za dvě, syn za čtyři a dcera za pět. Problém je v tom, že v tunelu je hrozná tma a jejich svíčka vydrží hořet pouze dvanáct minut. Úzkým tunelem mohou procházet naráz nejvýše dva lidé a v žádném případě nesmí jít tunelem nikdo bez svíčky. Poradíte rodině, jak mají tunelem projít?

4. (Bludiště) Pomocí matice velikosti $n \times m$ máte zadáno bludiště. X značí zeď a nula volný prostor. Na okraji matice jsou všude zdi, takže jde o uzavřený systém místností a chodeb. V matici se vyskytují i znaky \$=poklad a S=místo, kde se zrovna nacházíte. Zjistěte, zda se můžete dostat k pokladu. Předpokládejte, že nejste bílá paní, která by mohla procházet přes zdi.

$$\begin{array}{ccccccccc}
X & X & X & X & X & X & X & X & X \\
X & S & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & X \\
X & 0 & X & 0 & X & 0 & X & 0 & X \\
X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X \\
X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & \$ & X \\
X & X & X & X & X & X & X & X & X
\end{array}$$

5. (Bludiště se dveřmi) Máte zadané bludiště jako v předchozí úloze. Navíc se ale v bludišti vyskytují znaky D jako dveře. Dveře jsou ocelové a dají se otevřít pouze dynamitem. Nejste bílá paní, ale jste lupiči, co se chtějí vloupat do sejfu a vykrást banku. Podařilo se vám ukořistit plán sejfu. Pro hladký a bezpečný průběh akce se chcete dostat k penězům na co nejmenší počet kroků, ale hlavně tak, abyste museli odbouchnout co nejméně dveří. Jednou odbouchnutí dveří trvá nesrovnatelně déle než libovolný počet kroků v sejfu. Navíc nadělá ohromný hluk. Vaším úkolem je najít pro lupiče posloupnost pohybů vlevo, vpravo, nahoru, dolů tak, aby se dostali co nejrychleji k penězům. Lupiči už sami pochopí, že když mají projít dveřmi, tak je mají odprásknout.

6. (Theseus a Minotaurus) Zahrajeme si hru ve dvourozměrném bludišti $n \times m$ polí. V bludišti se (samozřejmě kromě zdí, ty se vyskytují v každém pořádném bludišti) nachází Theseus a Minotaurus. Vy budete ovládat Thesea a budete se snažit dostat z bludiště ven, čili dostat se na hranici bludiště a následujícím krokem z bludiště utéct. Ovšem nikdy nesmíte narazit na Minotaura, sic bídně zhynete. Na Minotaura narazíte, pokud s ním sdílíte políčko.

   Jeden tah probíhá následovně: nejprve se hýbe Minotaurus a táhne k-krát následujícím způsobem. Pokud nejsou postavy Minotaura a Thesea ve stejném sloupci, chce se Minotaurus pohnout o jedno políčko vlevo nebo vpravo, aby se Theseovi přiblížil. Pokud mu v tom nebrání zeď, skutečně se tam posune. Pokud nejsou obě postavy na stejném řádku bludiště, chce se Minotaurus pohnout nahoru či dolů opět směrem k Theseovi. Opět se na zvolené políčko Minotaurus přesune jen tehdy, není-li tam zeď. V jednom kroku provádí Minotaurus tyto pohyby v zadaném pořadí a může provést oba dva, čili se může dostat na jedno z okolních osmi políček. Po k takovýchto krocích Minotaura se hýbe Theseus, a to na jedno ze čtyř okolních volných polí. Takto se oba střídají na tahu, dokud buď Theseus neuteče z bludiště, nebo dokud Minotaurus nedohoní Thesea. Vaším úkolem bude najít pro Thesea nejkratší posloupnost pohybů vlevo, vpravo, nahoru, dolů, aby se dostal bezpečně z bludiště, případně říci, že to není možné.

7. (Průjezd městem) Máte zadaný plán města podobně jako v předchozích úlohách, tj. pomocí matice. Tentokrát jsou v něm pouze silnice široké jeden čtvereček a křižovatky. Vaším úkolem je najít cestu ze startu do cíle (čtverečky označené S a C). Zdá se vám to jednoduché? Tak zkuste najít cestu ze startu do cíle s dodržováním místních dopravních předpisů. V tomto městě je zakázáno na libovolné křižovatce odbočovat vpravo. Vpravo se ale můžete dostat například tak, že projedete rovně přes křižovatku a objedete jeden blok (třikrát zatočíte vlevo).

8. (Následník ve stromě) Dostaneme zakořeněný strom. Vrchol u je následníkem vrcholu v, pokud v leží na cestě z kořene do u. Postupně budete dostávat dvojice vrcholů x, y a chtěli bychom co nejrychleji odpovídat na otázku, jestli je x následníkem y?

   Pokud si můžete dovolit předzpracování v čase $\mathcal{O}(n)$, zvládnete odpovídat v konstantním čase?

9. (Eulerovský tah) Tah v grafu G je posloupnost v_0, e_0, v_1, e_1,... v_n taková, že $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ a $v_i \neq v_j$ pro všechna i, j (neboli každé 2 po sobě jdoucí hrany mají společný vrchol a vrcholy se v posloupnosti neopakují). *Uzavřený Eulerovský tah* je tah, který projde všechny hrany grafu a skončí ve stejném vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený Eulerovský tah* projde všechny hrany grafu, ale může končit na jiném místě, než začal.

   (a) Navrhněte algoritmus, který v grafu G najde uzavřený Eulerovský tah a vypíše ho. Případně odpovězte, že takový tah neexistuje.

   (b) Navrhněte algoritmus, který v grafu G najde otevřený Eulerovský tah a vypíše ho. Případně odpovězte, že takový tah neexistuje.

10. (Topologické uspořádání) Topologické uspořádání vrcholů je seřazení (očíslování) vrcholů do řady v_1, v_2,...,v_n tak, aby každá hrana vedla zleva do prava (z vrcholu s nižším číslem do vrcholu s vyšším číslem). Navrhněte algoritmus, který dostane orientovaný graf G a nalezne topologické uspořádání jeho vrcholů $V(G)$.

11. (Hledání kružnice) Navrhněte algoritmus, který dostane neorientovaný graf, a zjistí, jestli graf obsahuje kružnici. Zkuste vymyslet řešení, které běží v čase $\mathcal{O}(n)$ (tedy je nezávislé na počtu hran).

12. (Cyklus obsahující hranu e) Dostanete neorientovaný graf G s vyznačenou hranou e. Navrhněte algoritmus pracující v lineárním čase, který zjistí, jestli v grafu G existuje cyklus obsahující hranu e.