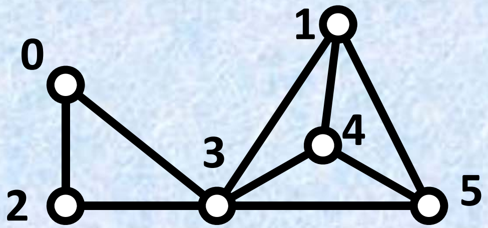
Graf



- **Uzly**
- Lokality, servery
- Osoby fyzické i právní
- Informatické objekty
- ... atd.

- **Hrany**
- Cesty, propojení
- Vztahy
- Informatické závislosti
- ... atd.

Běžné reprezentace grafu

Uzly = indexy		**Stupně uzlů**		**Seznamy sousedů**				
0	.....	2	.....	2	3			
1	.....	3	.....	3	4	5		
2	.....	2	.....	0	3			
3	.....	5	.....	0	2	1	4	5
4	.....	3	.....	1	3	5		
5	.....	3	.....	1	3	4		

1D/2D pole, vector, ArrayList...

Matice sousednosti

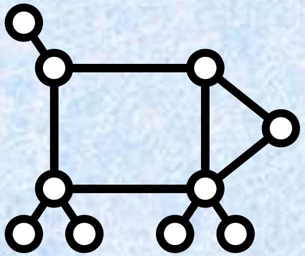
Uzly = indexy	0	1	2	3	4	5
0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	1	0	0	1	0	0
3	1	1	1	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	1	0

2D pole, matice...

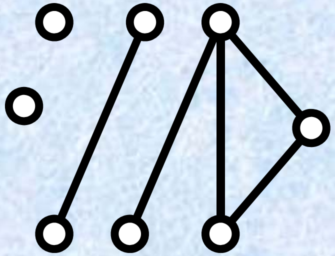
Zamotané, poměrně efektivní

Přehlednější, méně efektivní

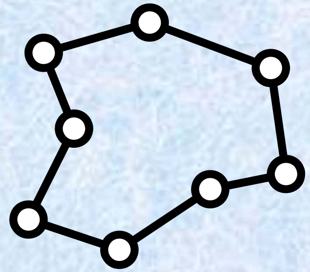
Malé grafové zoo



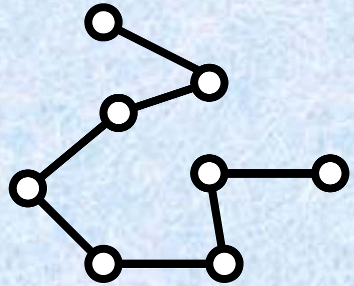
- **Souvislý graf**



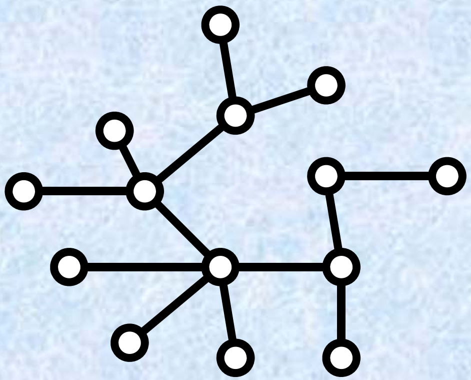
- **Nesouvislý graf**



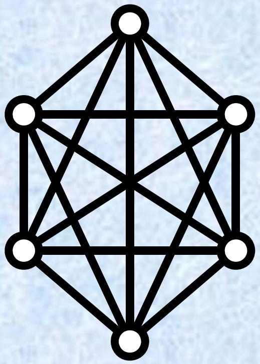
- **Kružnice**
- N uzlů, N hran



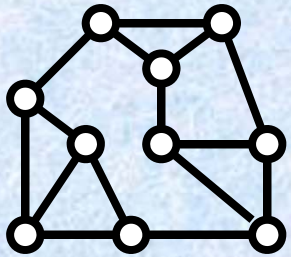
- **Cesta**
- N uzlů, N–1 hran



- **Strom**
- Souvislý
- N uzlů, N–1 hran
- je bipartitní

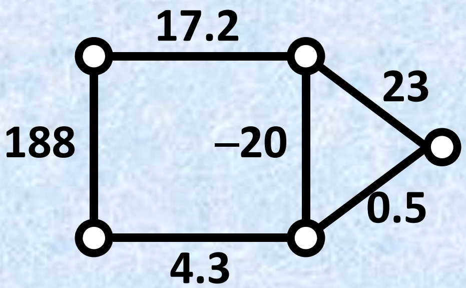


- **Úplný graf**
- N uzlů,
- $(N^2-N)/2$ hran

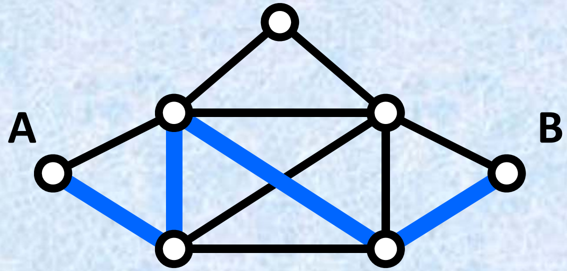


- **Pravidelný graf**
- Všechny uzly mají stejný stupeň.

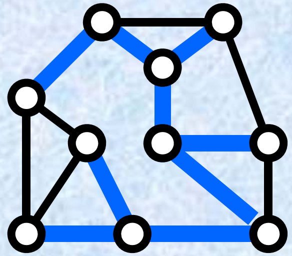
Malé grafové zoo



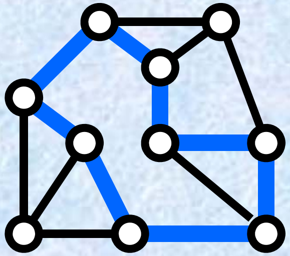
- **Vážený graf**
- Každá hrana má svou váhu (cenu, délku, ...).



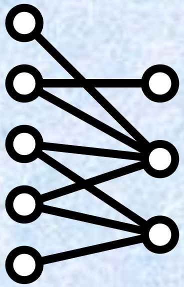
- **Cesta mezi A a B**
- Cesta neprojde žádným uzlem dvakrát.



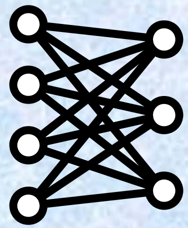
- **Kostra grafu**
- podgraf, který obsahuje všechny uzly a je strom (angl: spanning tree)



- **Kružnice v grafu**
- Cesta, jejíž první a poslední uzel splývají.

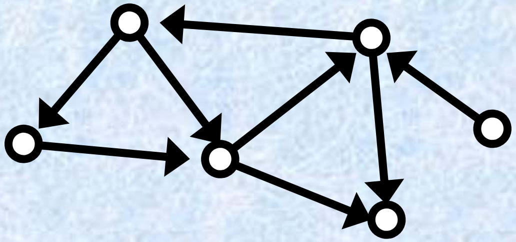


- **Bipartitní graf**
- dvoubarevný
- kružnice jen sudé délky

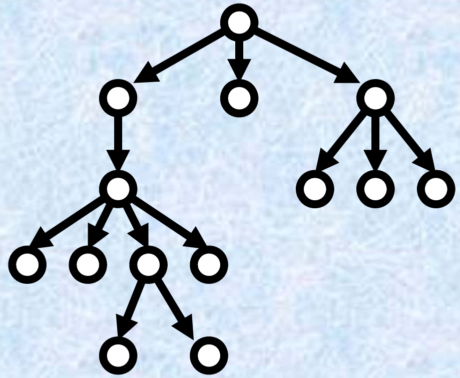


- **Úplný bipartitní graf**
- M a N uzlů v partitách
- M x N hran

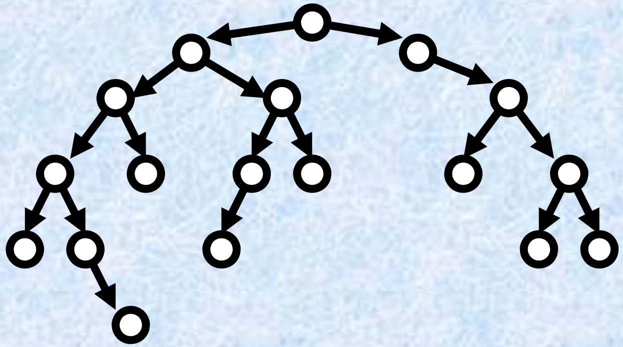
Malé grafové zoo



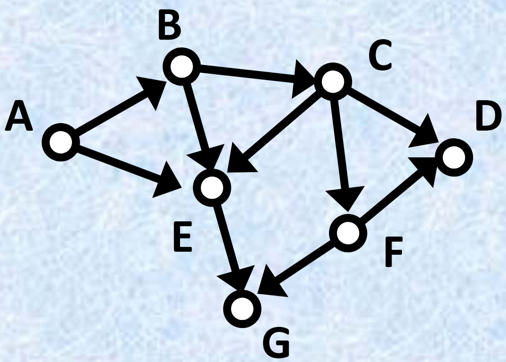
❖ **Orientovaný graf**



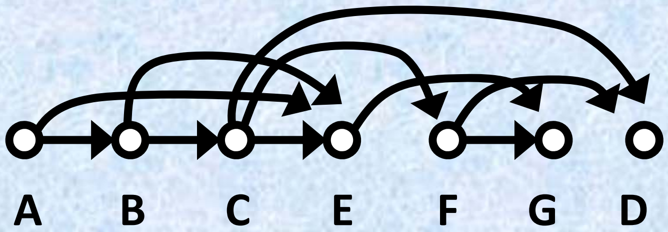
❖ **Kořenový strom**



❖ **Binární kořenový strom**



❖ **Orientovaný acyklický graf**
❖ **DAG --** Directed AcyclicGraph



❖ **Týž acyklickýgraf v topologickém uspořádání**

Položíme si o grafech několik jednoduchých nenápadných otázek.

Snadná otázka = kompletní řešení zvládne dobrý informatický bakalář.

Těžká otázka = kompletní řešení dosud nezvládl nikdo.

(Ačkoli většinou existují velmi dobrá přibližná a náročná řešení.)

Clay Mathematics Institute

http://www.claymath.org/millennium-problems/rules-millennium-prizes

Od r. 2000 nabízí **1 000 000 $** za kompletní řešení kterékoli těžké otázky.

Dodnes se nikdo nepřihlásil....

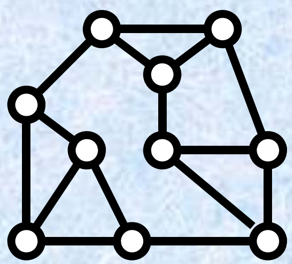
Souvislost

Existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly?

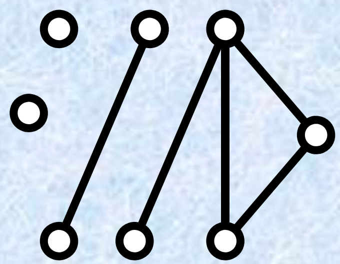
Snadná otázka

Algoritmus: DFS, BFS, Union-Find

Složitost: DFS, BFS $O(\ |V|+|E|\ )$, Union-Find $O(\ |E| \cdot \alpha(|V|)\ )$



Ano,
jedna komponenta souvislosti.



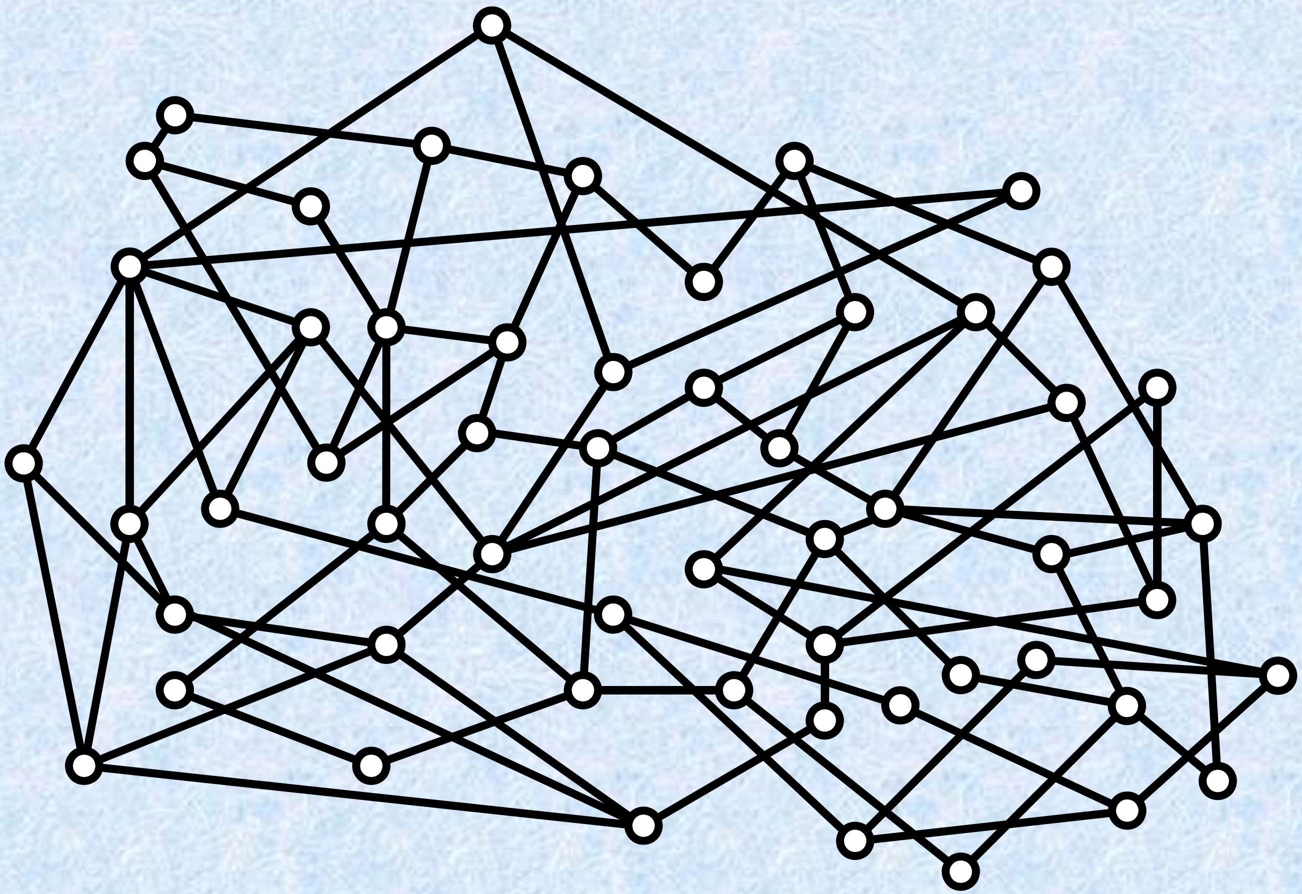
Ne,
čtyři komponenty souvislosti.

Souvislost

Existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly?

Snadná otázka

Souvislý graf?



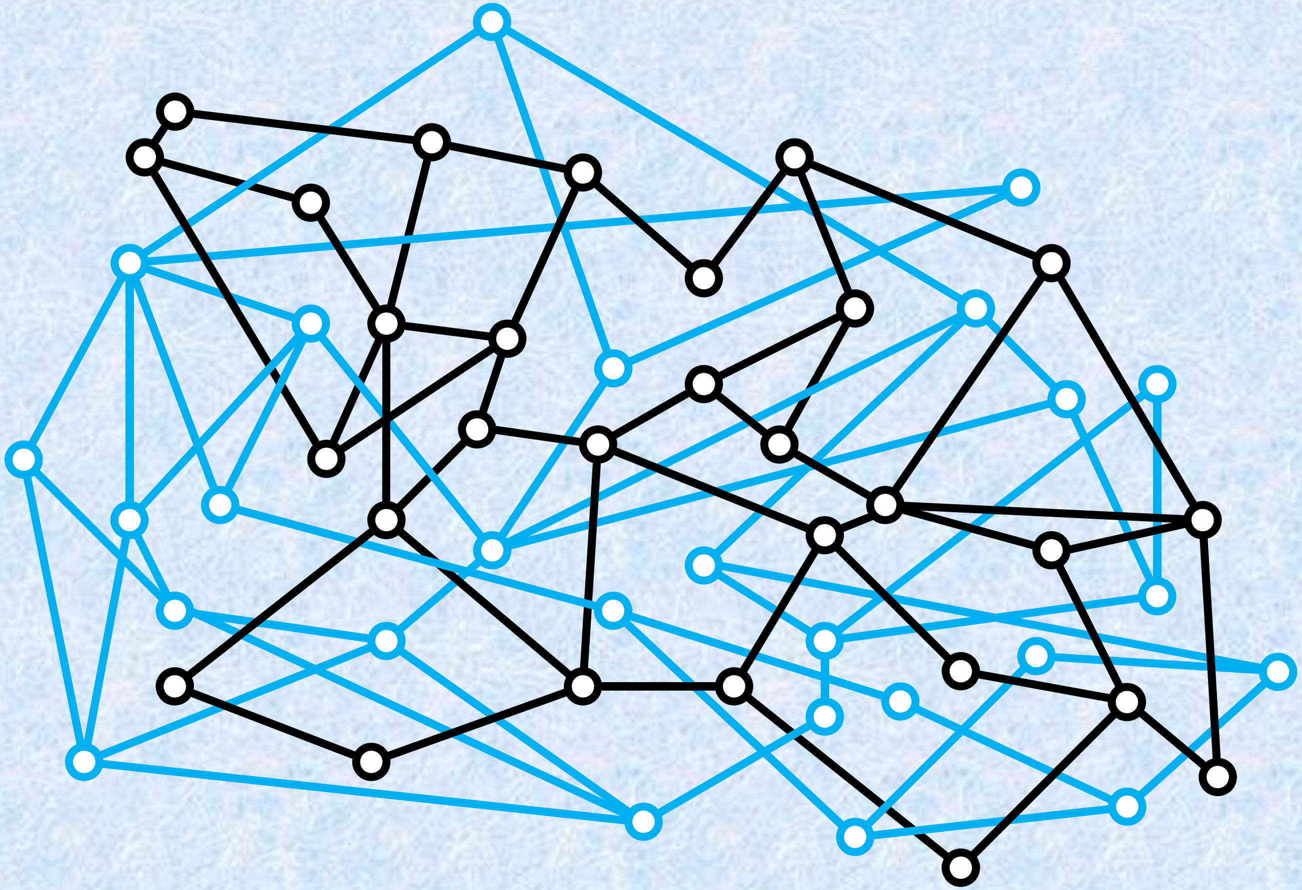
Souvislost

Existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly?

Snadná otázka

Souvislý graf?

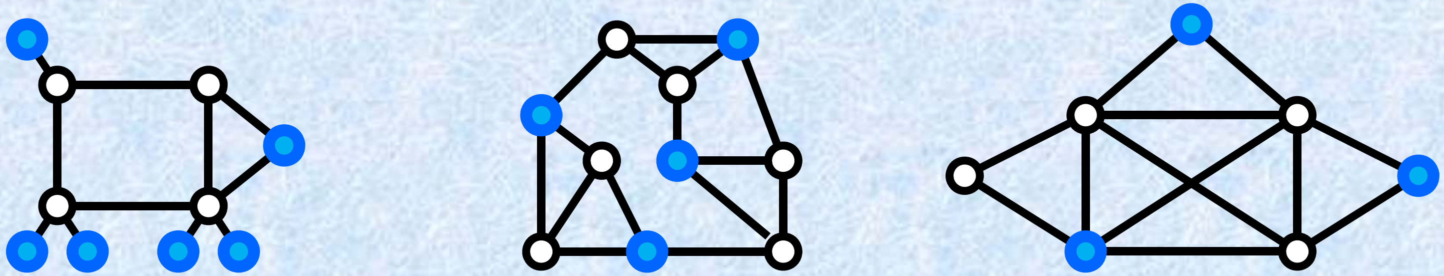
Ne,
dvě komponenty.



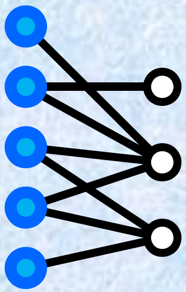
Nezávislost

Velikost maximální množiny uzlů takové, že žádné její dva uzly nesousedí.

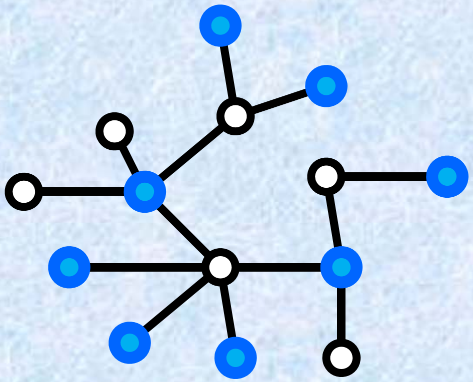
Těžká otázka obecně



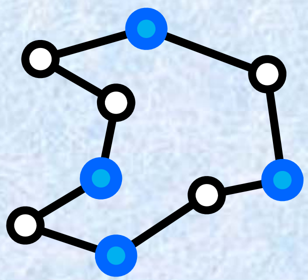
Snadná otázka pro grafy s některou jednoduchou strukturou



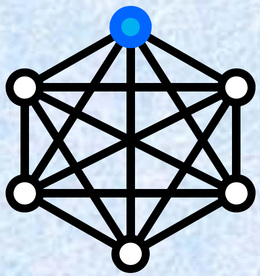
❖ **Bipartitnígraf**



❖ **Strom** je vždy bipartitní



❖ **Kružnice**



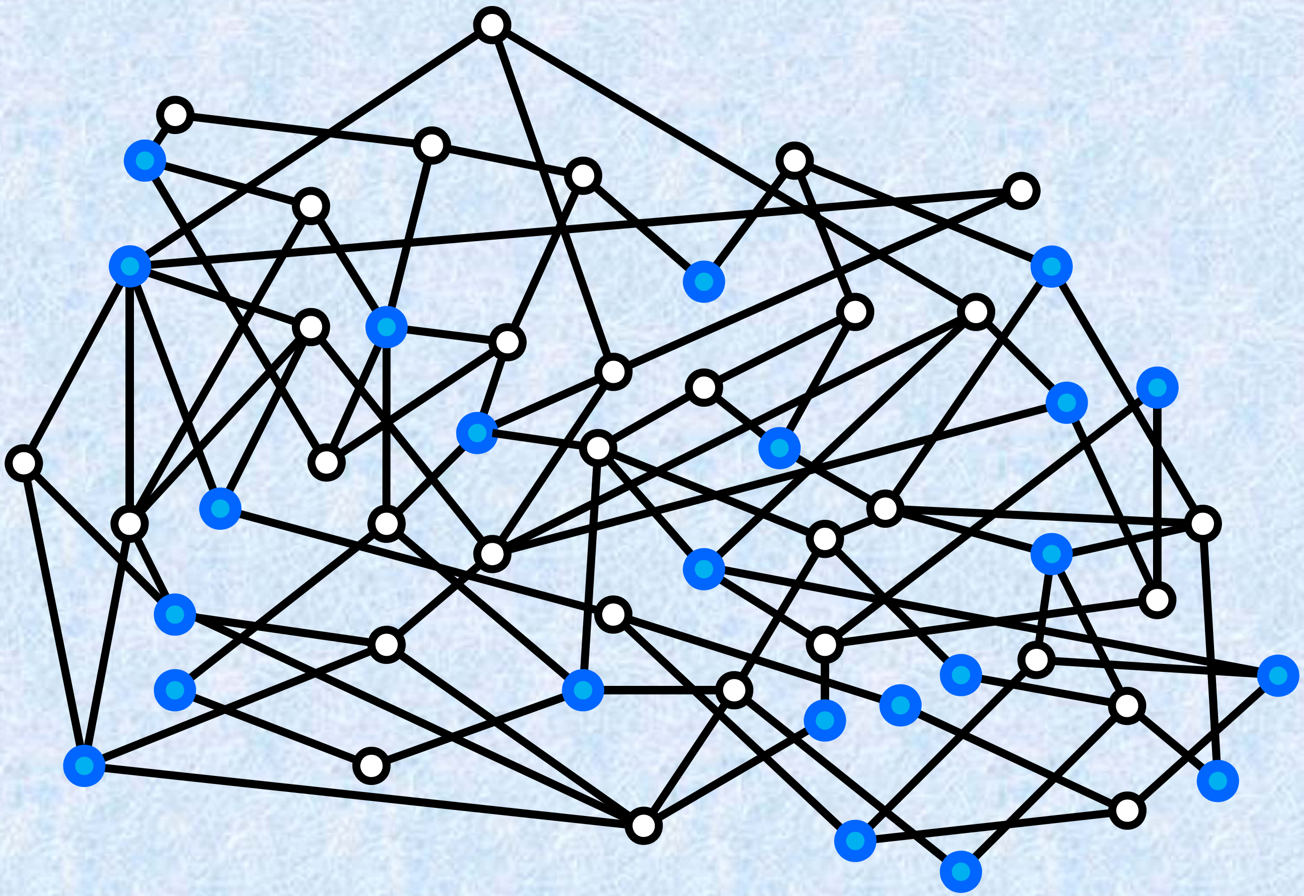
❖ **Úplný graf**

Nezávislost

Velikost maximální množiny uzlů takové, že žádné dva nesousedí.

Př. Kolik jich bude? Více než 23?

Těžká otázka

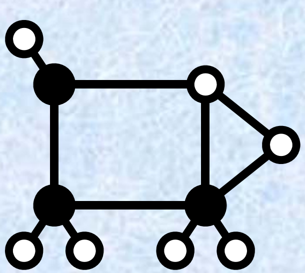


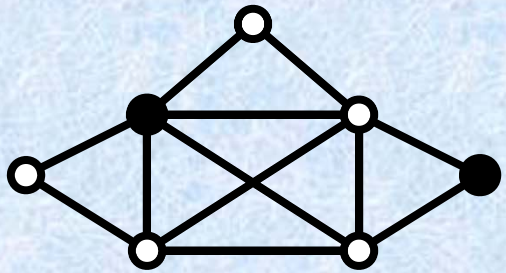
Dominance

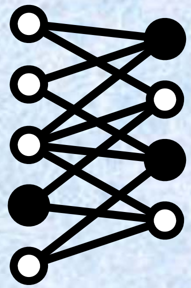
Velikost takové minimální množiny uzlů M, že každý uzel v grafu je buď v M nebo sousedí s nějakým uzlem v M.

Př. Požární stanice má být vždy buď ve vesnici nebo v sousední vesnici. Jaký je minimální počet potřebných požárních stanic?

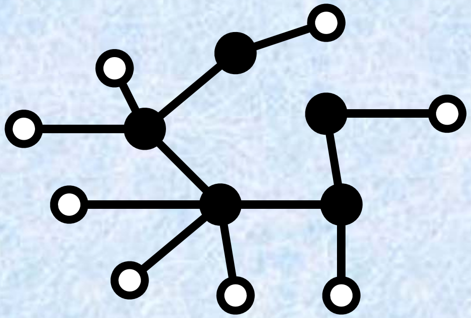
Těžká otázka

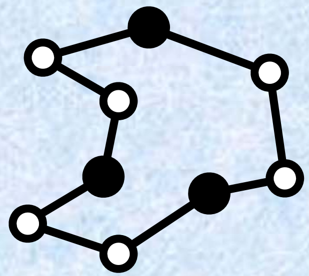


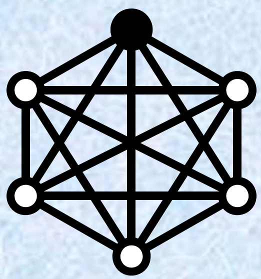




Snadná otázka pro grafy s určitou jednoduchou strukturou







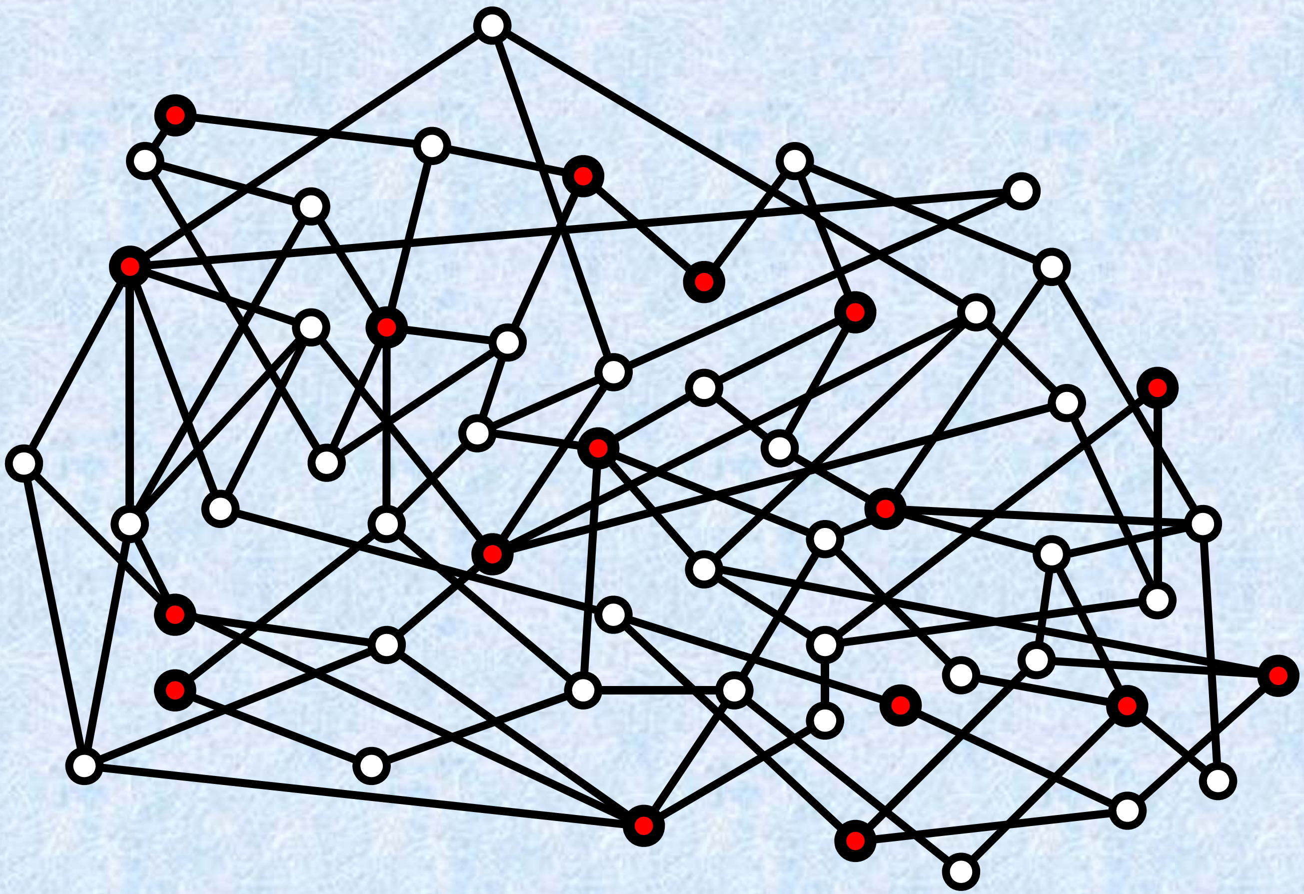
- **Strom,** použij DP
- **Kružnice**
- **Úplný graf**

11

Dominance

Př. Požární stanice má být vždy buď ve vesnici nebo v sousední vesnici. Jaký je minimální počet potřebných požárních stanic? Postačí 17?

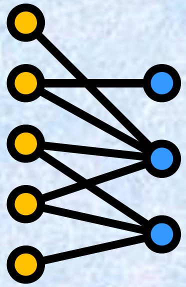
Těžká otázka



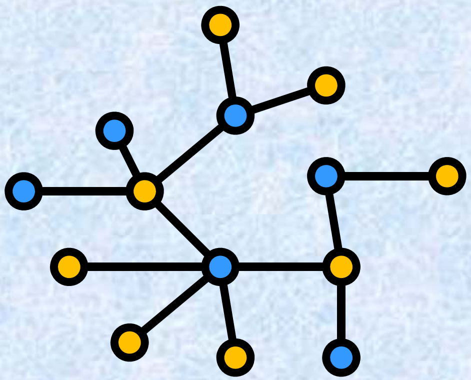
Barevnost

Minimální počet barev na obarvení uzlů tak, aby sousední uzly vždy měly rozdílnou barvu.

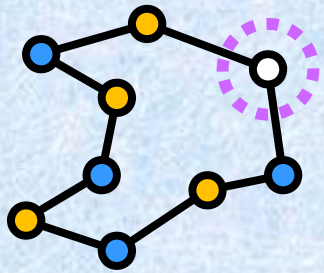
Stačí 2 barvy? -- Snadná otázka.   Vždy, když je graf bipartitní.



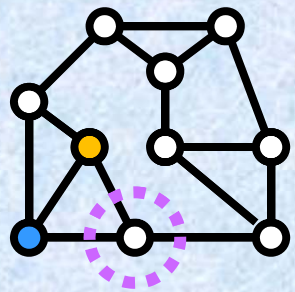
**2 barvy stačí,
graf je bipartitní.**



**2 barvy stačí,
strom je vždy bipartitní.**



**2 barvy nestačí,
v bipartitním grafu
jsou kružnice
jen sudé délky.**



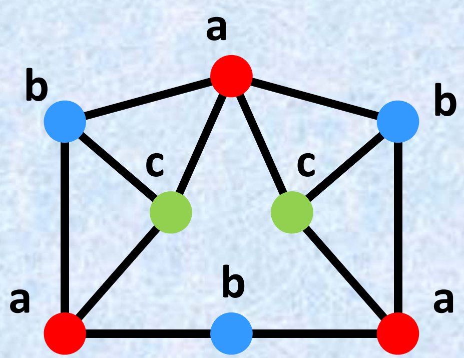
**2 barvy nestačí,
graf obsahuje
trojúhelník
(což je kružnice
liché délky).**

Bipartitnost se určí pomocí BFS.
Uzly v sudé vzdálenosti od startu označíme 0, uzly v liché vzdálenosti od startu označíme 1. Průběžně ověřujeme, zda nějaké dva stejně označené uzly sousedí.
Pokud ano, graf NENÍ bipartitiní, jinak JE bipartitní.

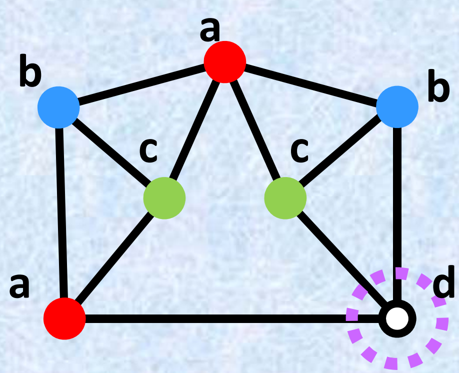
Barevnost

Minimální počet barev na obarvení uzlů tak, aby sousední uzly vždy měly rozdílnou barvu.

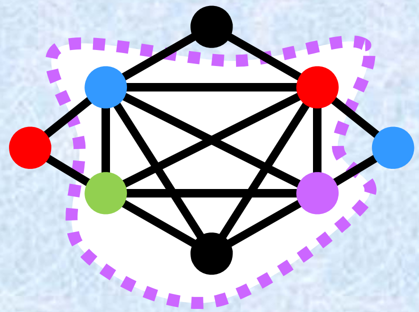
Stačí 3 barvy nebo více? -- Těžká otázka



3 barvy.



4 barvy.
Obarvení a,b,c je BÚNO, vynutí si barvu d vpravo dole.



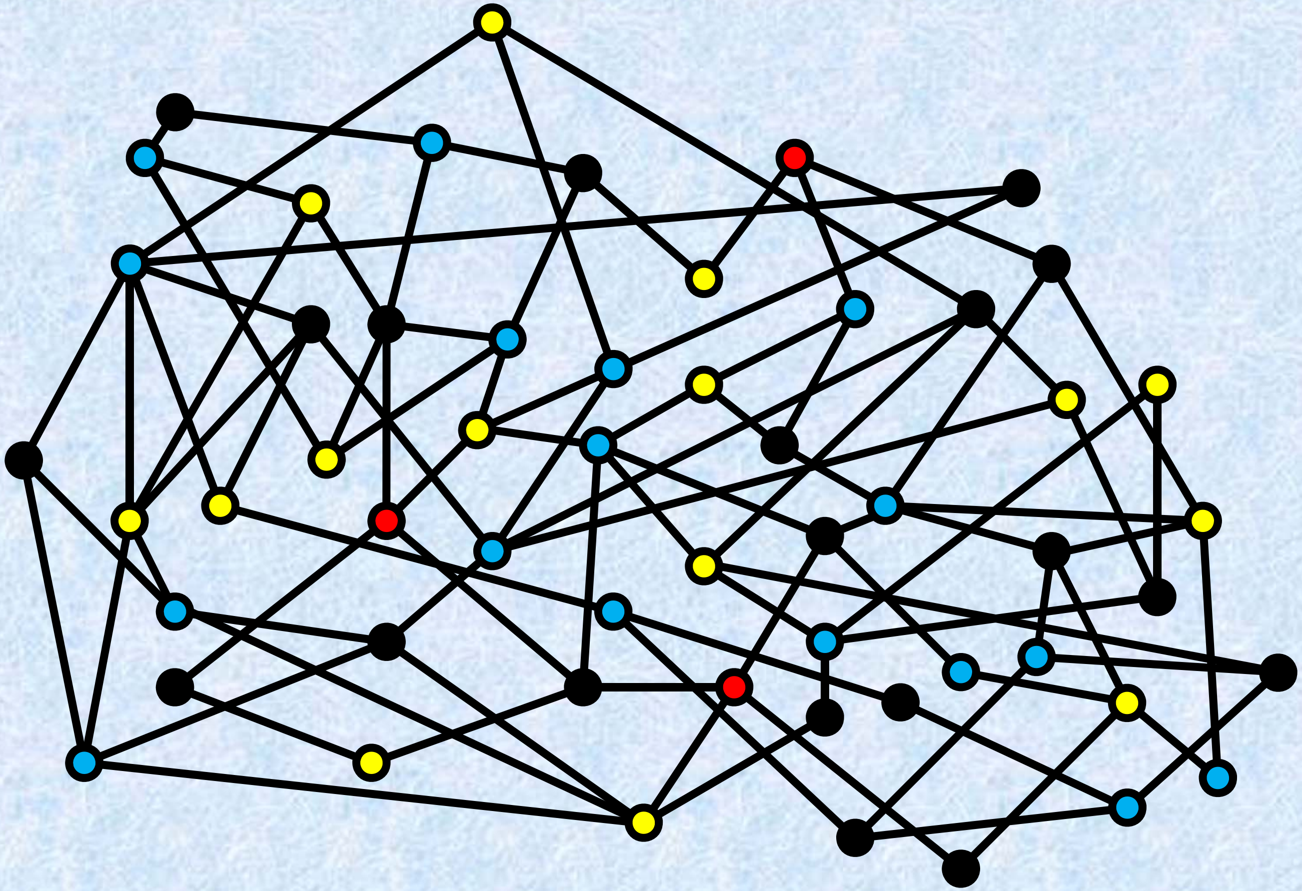
5 barev.
Graf obsahuje největší kliku velikosti 5.
Klikovost je také těžká otázka.

Barevnost

Minimální počet barev na obarvení uzlů tak, aby sousední uzly vždy měly rozdílnou barvu.

Stačí 3 barvy nebo více? -- Těžká otázka

4 barvy stačí.
Budou stačit 3?



Nejkratší cesty

Nejkratší může být co se týče počtu hran nebo součtu délek jejích hran.

Snadná otázka

Algoritmy: BFS, Dijkstra, Bellman–Ford, Floyd–Warshall, Johnson...
Složitosti: Později, u jednotlivých případů.

Nejdelší cesty

Typicky s podmínkou nejvýše jedné návštěvy každého uzlu/hrany.

Těžká otázka pro obecné grafy

Snadná otázka pro stromy a DAG

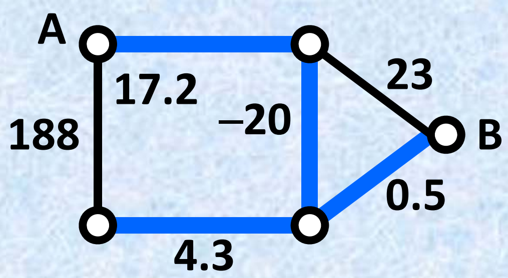
Algoritmus: Dynamické programování
Složitost : $O(|V|+|E|)$

Minimální kostra

Minimální sumární délka (cena) hran, které "drží graf pohromadě", tj. které umožňují spojení, byť nepohodlné, mezi každými dvěma uzly. Kostra je strom.

Snadná otázka

Algoritmy:	**Primův**	$O(\,\|V\|^2\,)$	s maticí sousednosti
		$O(\,\|E\|\cdot\log(\|V\|)\,)$	se spojovou reprezentací a s binární haldou
		$O(\,\|E\| + \|V\|\cdot\log(\|V\|)\,)$	se spojovou reprezentací a s Fibonacciho haldou
	Kruskalův	$O(\,\|E\|\cdot\log(\|V\|)\,)$	stačí seznam hran na vstupu
	Borůvkův	$O(\,\|E\|\cdot\log(\|V\|)\,)$	se spojovou reprezentací

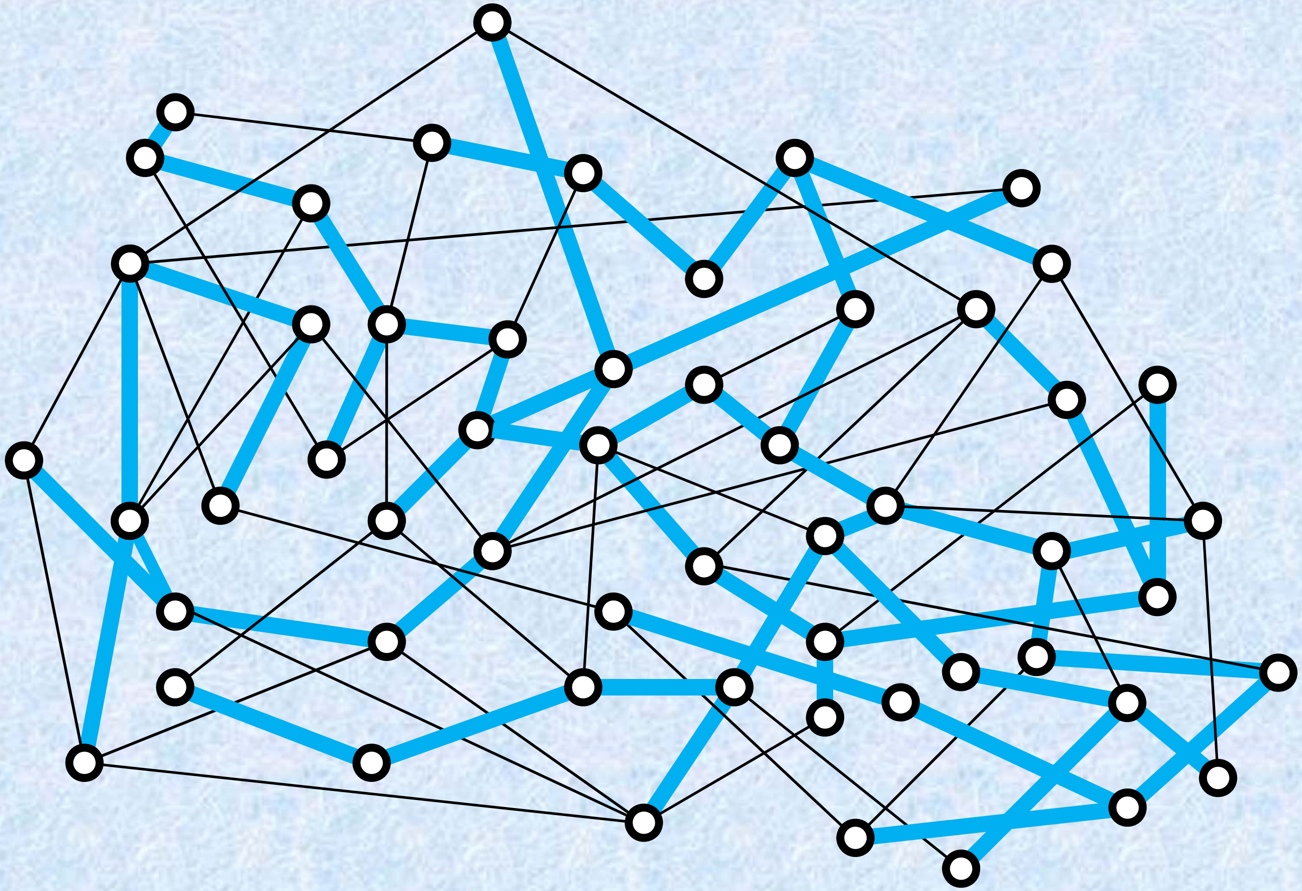


Minimální kostra

Minimální sumární délka (cena) hran, které "drží graf pohromadě", tj. které umožňují spojení, byť nepohodlné, mezi každými dvěma uzly. Kostra je strom.

Snadná otázka

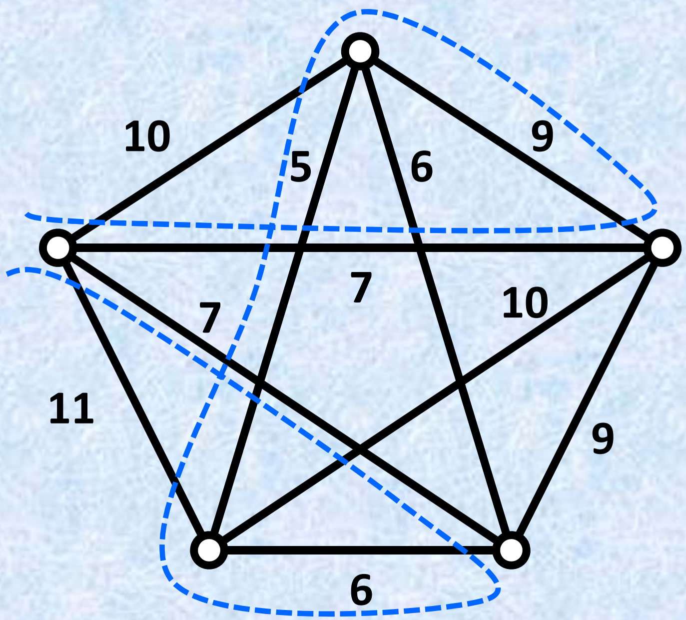
Zde cena hrany odpovídá její délce v nakreslení.



Úloha obchodního cestujícího

Projděte úplný graf, navštivte každý uzel aspoň jednou a vraťte se do výchozího uzlu. Celková délka cesty musí být minimální.

Těžká otázka



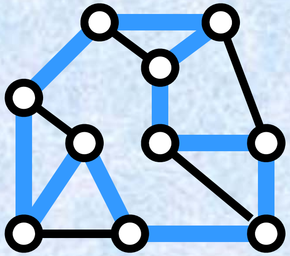
Hamiltonovská cesta

Obsahuje graf cestu, která prochází každým uzlem?

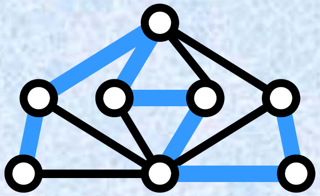
Hamiltonovská kružnice

Obsahuje graf kružnici, která prochází každým uzlem?

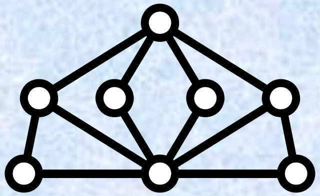
Těžká otázka



Existuje
cesta i kružnice.



Existuje
jen cesta
a ne kružnice.



Neexistuje
ani cesta
ani kružnice.

Eulerův tah

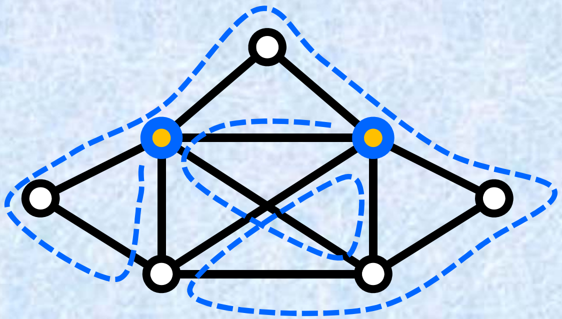
Lze graf namalovat jedním tahem ?

Pokud ano, jak? (Každou hranu malujeme právě jedenkrát.)

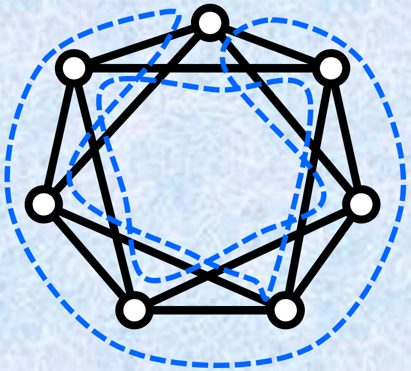
Př. Lze projít všechny ulice ve městě a do žádné se nevracet?

Snadná otázka   Graf musí být souvislý a s nejvýše dvěma uzly lichého stupně.

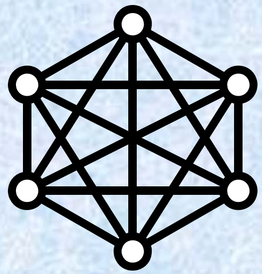
Algoritmus: Hierholzerův   O(|E|)



Tah musí začínat a končit v ve zvýrazněných uzlech lichého stupně.



Tah je uzavřený, všechny stupně uzlů jsou sudé.



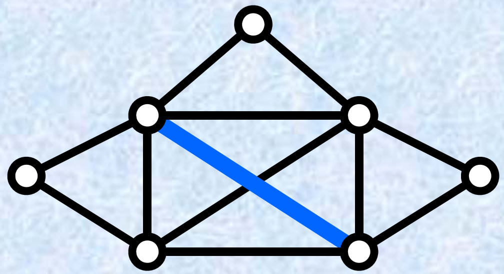
Tah neexistuje, všechny uzly jsou stupně 5.

Planární (rovinný) graf

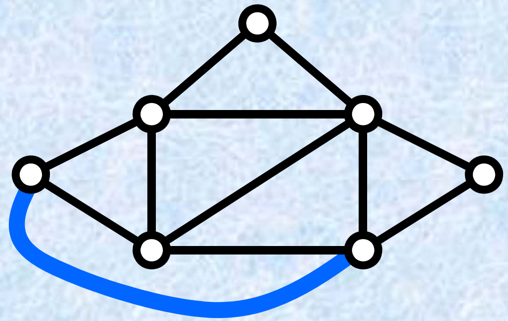
Lze graf namalovat do roviny bez toho, aby se hrany křížily?

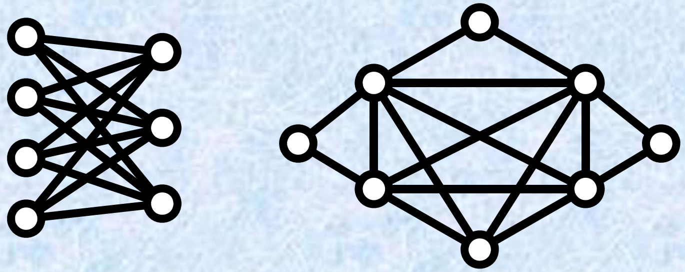
Snadná otázka (ale přece jen pokročilejší) 🙂

Algoritmus: Hopcroft a Tarjan, O(|V|)
Boyer a Myrvold, O(|V|)



Je planární,
modrou hranu lze vést jinudy:

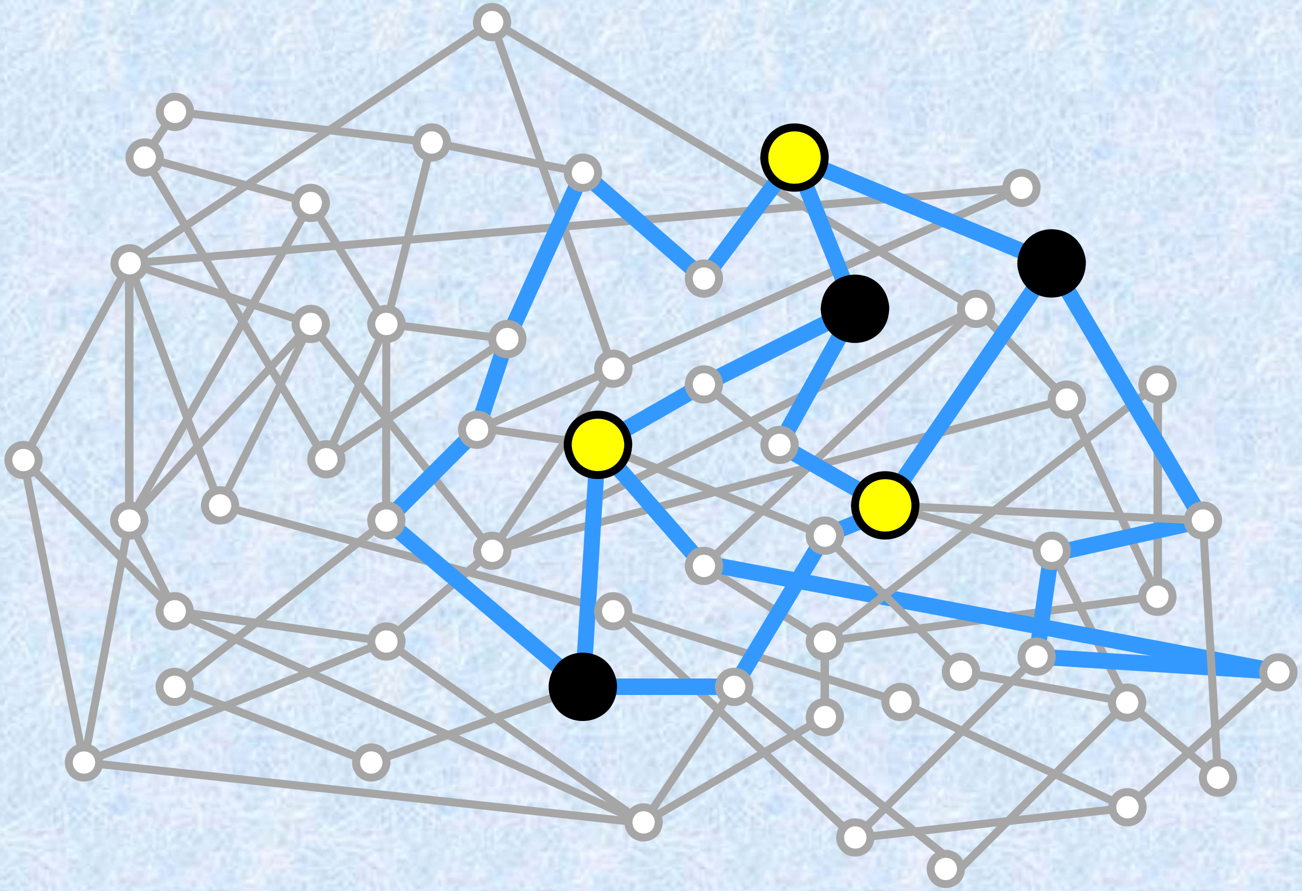




Nejsou planární.
Pokud graf "obsahuje" v sobě
úplný graf s 5 uzly nebo
úplný bipartitní graf s 3 a 3 uzly,
pak není planární.

Planární graf

Lze graf namalovat do roviny bez toho, aby se hrany křížily?



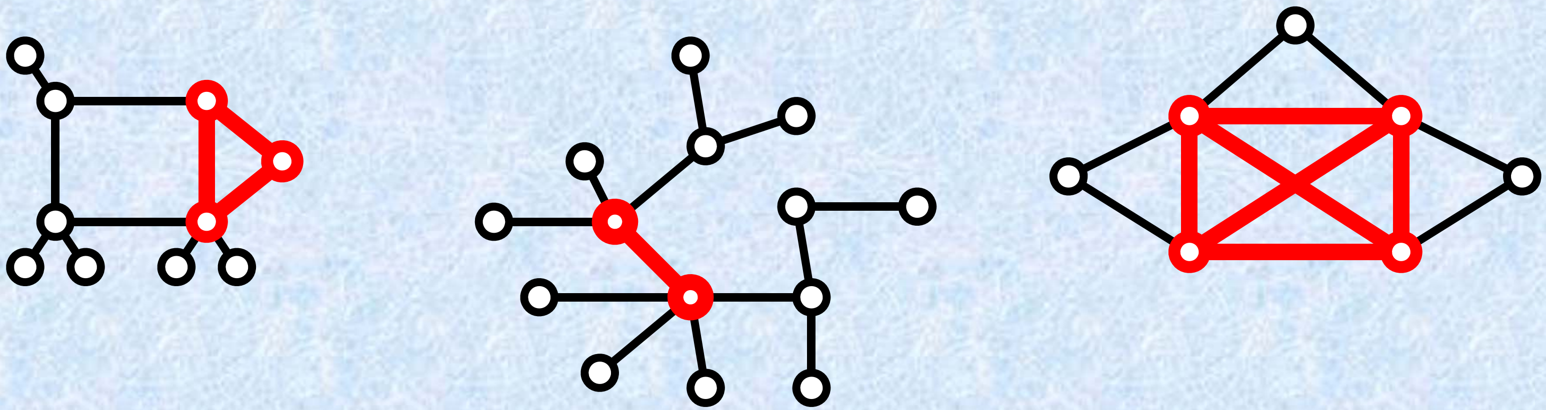
Zde to nejde. Každý černý uzel je spojen třemi separátními cestami s každým žlutým uzlem a naopak. To je případ úplného bipartitního grafu s partitami velikosti 3 a 3, což nelze nakreslit do roviny bez křížení hran.

Klikovost

Jaká je maximální velikost kliky, to jest skupiny uzlů,
v níž každý uzel sousedí s každým?

Př. Vyberte na náročnou exkurzi co největší skupinu spolužáků, v níž každý kamarádí s každým.

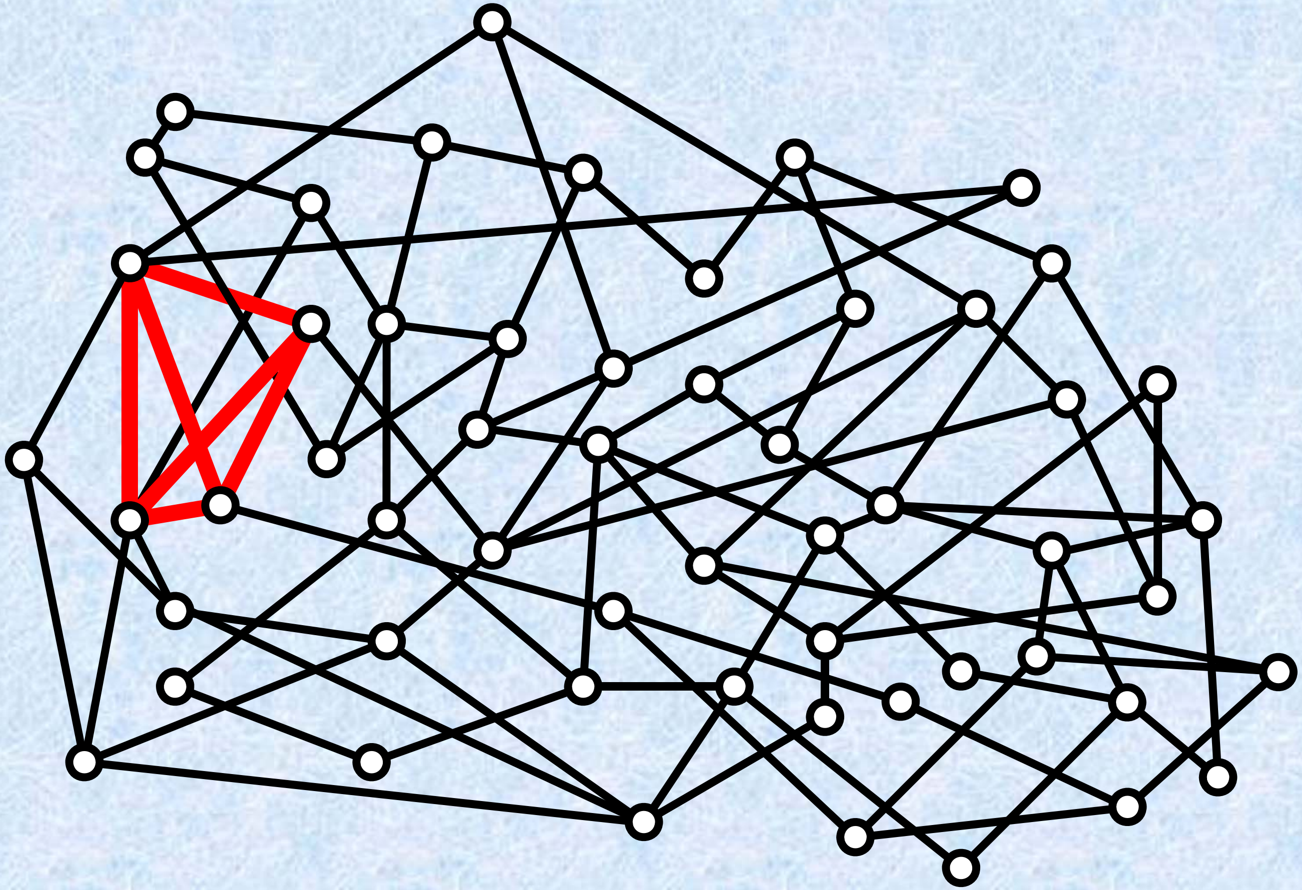
Těžká otázka



Klikovost každého stromu je 2.

Klikovost

Jaká je maximální velikost kliky, to jest skupiny uzlů,
v níž každý uzel sousedí s každým?

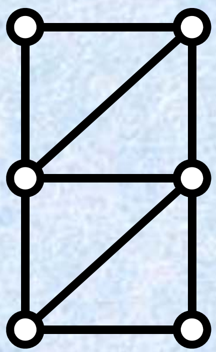


Klika velikosti 5 tu není.   Stačí ověřit mechanicky sousednosti ve všech COMB(55, 5) = 3 478 761 pětiprvkových množinách uzlů.

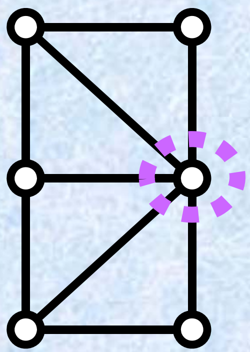
Grafový izomorfizmus

Lze jeden z grafů nakreslit tak, aby vypadal přesně jako ten druhý?
To jest, mají identickou strukturu?

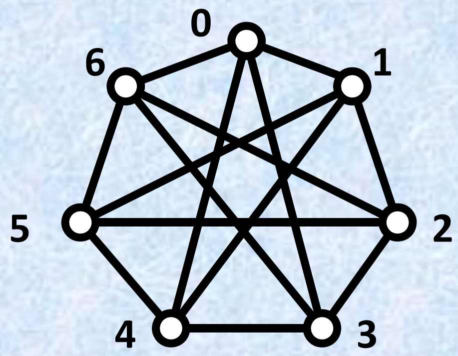
Není ani známo, zda je to těžká nebo snadná otázka.



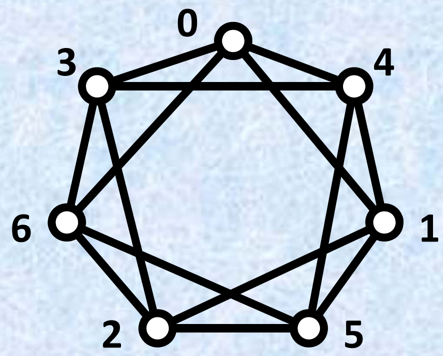
A



B



C



D

**A a B nejsou izomorfní,
pravý prostřední uzel stupně 5 v B
nemá protějšek v A, struktura A a B
nemůže být stejná.**

**C a D izomorfní jsou,
stejně očíslované uzly si odpovídají,
hrany v obou grafech vedou
mezi stejně očíslovanými uzly.**

Částečný přehled nepřehledné struktury běžných grafových otázek

Snadná otázka	"Jak kdy "	Těžká otázka
Souvislost? **Nejkratší cesta?** **Minimální kostra?** **Eulerův tah?** **Rovinnost?**	**Barevnost?** 1,2 barvy **snadné** 3 a více barev **těžké** **Izomorfizmus?** Stromy, cirkulanty **snadné** pravidelné grafy **těžké** atd.. **Nejdelší cesta?** DAG, strom **snadné** obecný graf **těžké**	**Nezávislost?** **Dominance?** **Hamiltonicita?** **Eulerův tah?** **Klikovost?** **Obchodní cestující?**

Další otázky? Někdy lze rozhodnout snadno, do které kategorie úloha patří, někdy to neví nikdo...

Kam dál?

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/laso2017/odkazy