ALG 09

Radix sort (přihrádkové řazení)

Counting sort

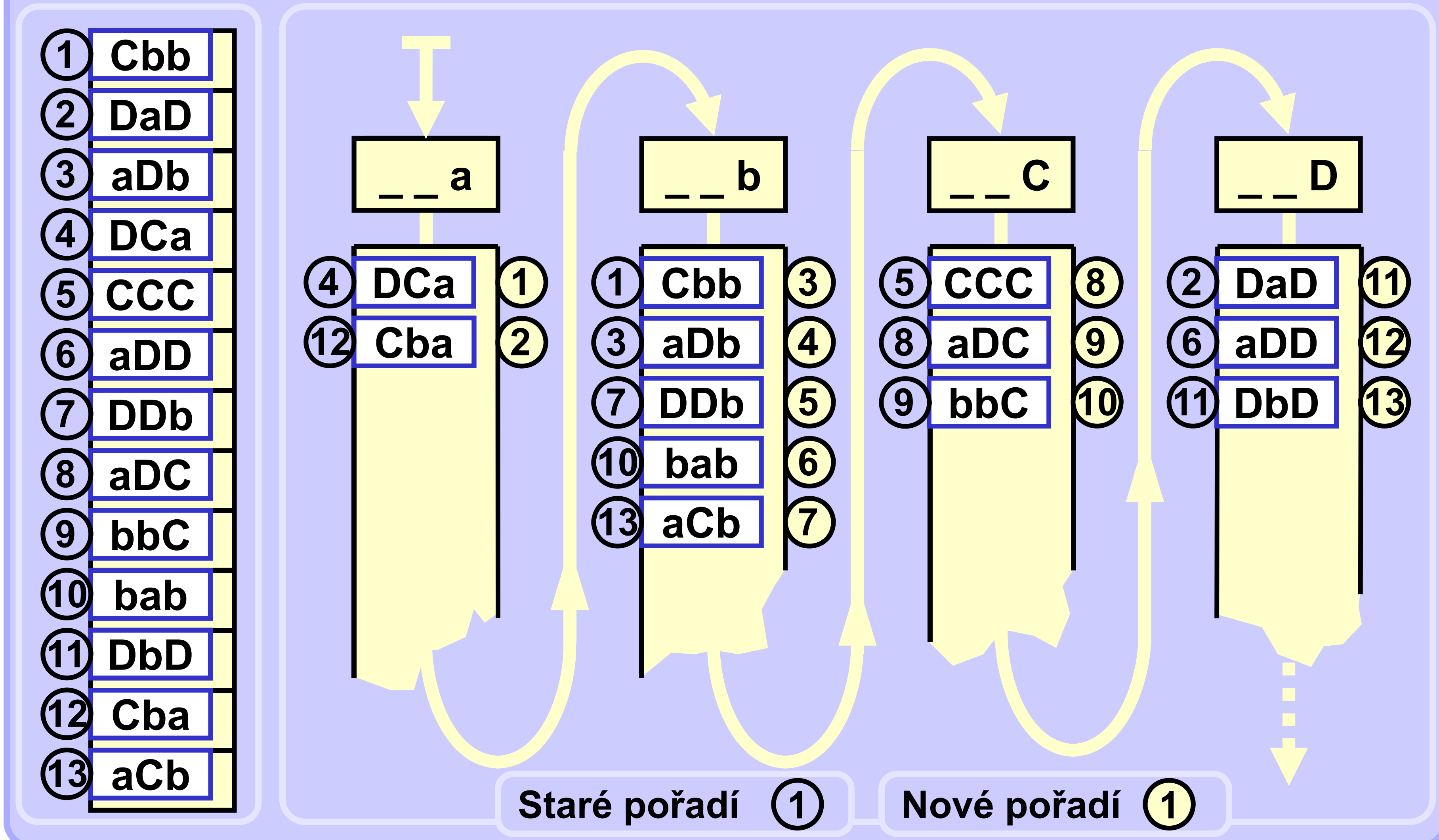
Přehled asymptotických rychlostí jednotlivých řazení

Ilustrační experiment řazení

Radix sort

Neseřazeno

Řaď podle 3. znaku

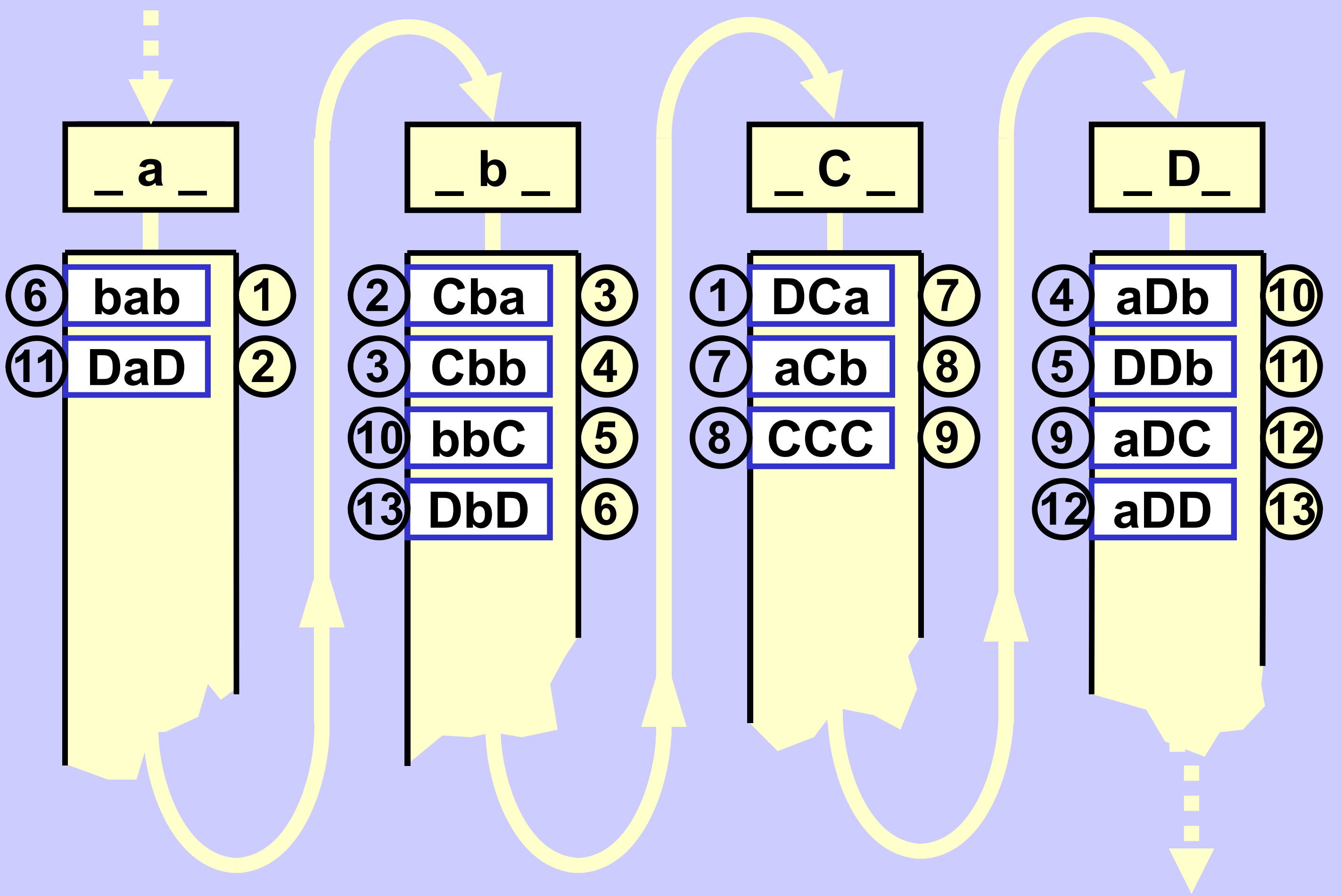


Radix sort

Seřazeno od 3. znaku

1	DCa
2	Cba
3	Cbb
4	aDb
5	DDb
6	bab
7	aCb
8	CCC
9	aDC
10	bbC
11	DaD
12	aDD
13	DbD

Řaď podle 2. znaku

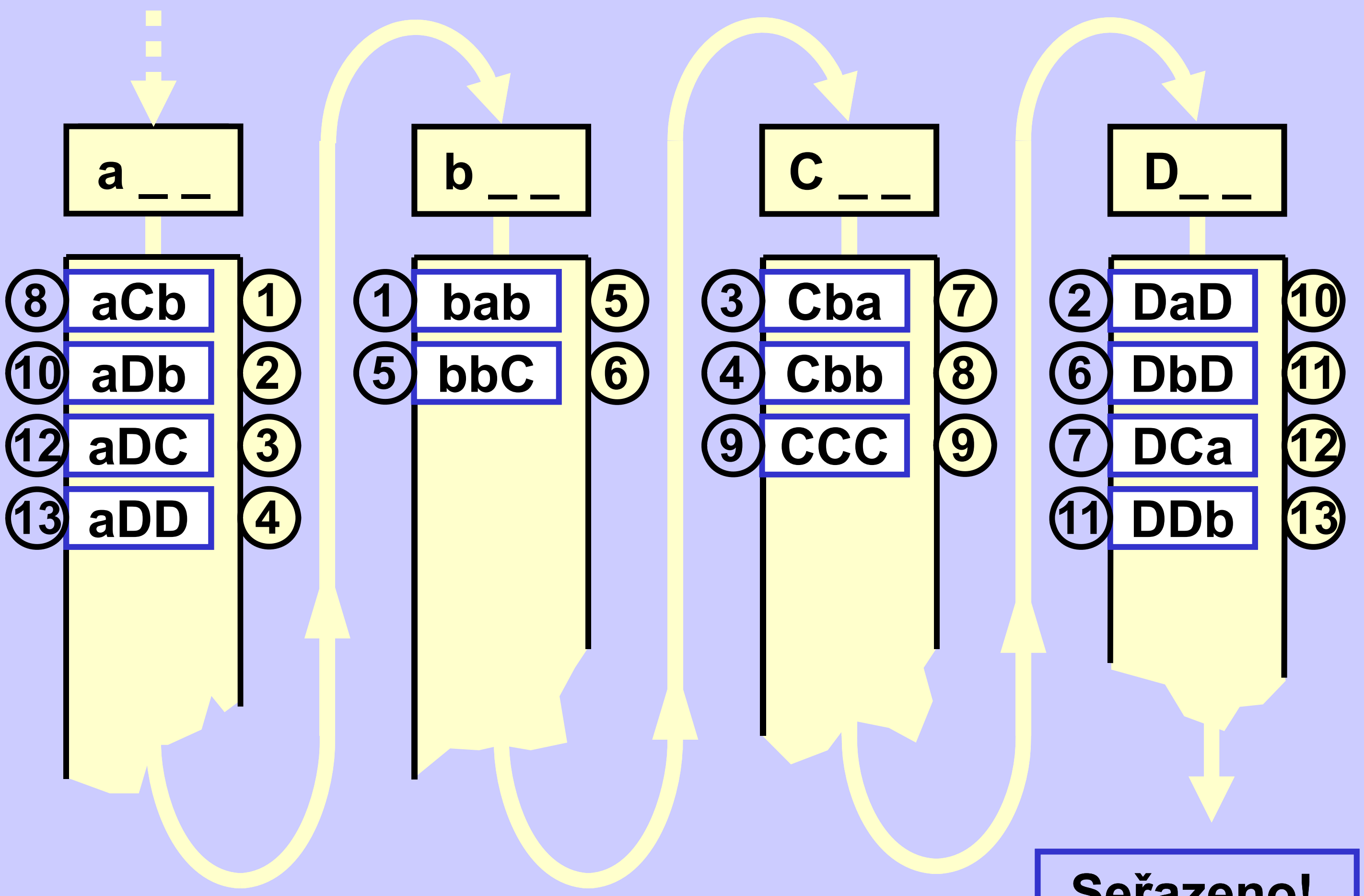


Radix sort

Seřazeno od 2. znaku

1. bab
2. DaD
3. Cba
4. Cbb
5. bbC
6. DbD
7. DCa
8. aCb
9. CCC
10. aDb
11. DDb
12. aDC
13. aDD

Řaď podle 1. znaku



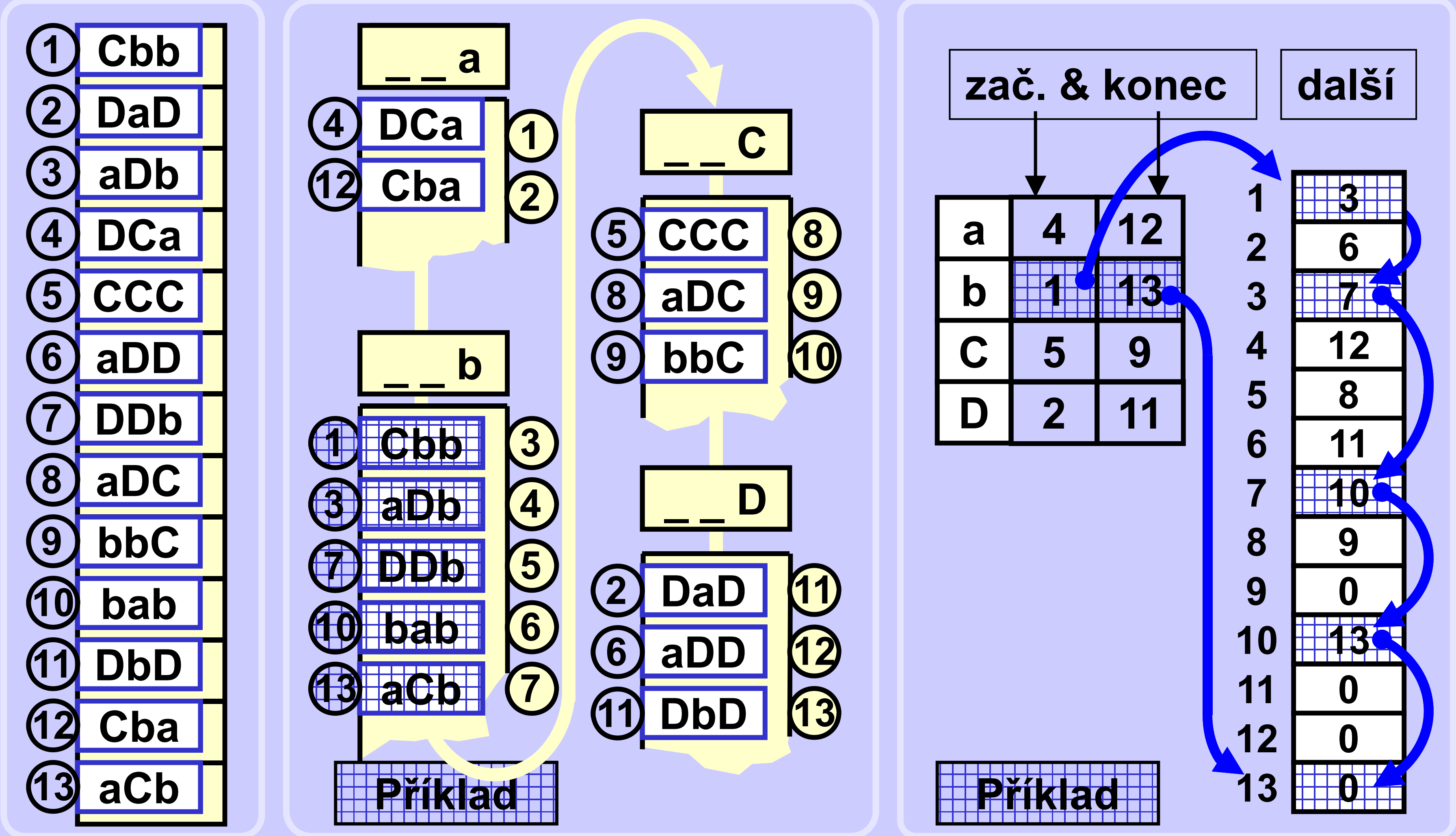
Seřazeno!

Implementace radix sortu

Neseřazeno

Seřazeno dle 3. znaku

Pomocná pole indexů registrují nové pořadí.



Implementace radix sortu

Neseřazeno

Jedno pole pro všechny seznamy

	Neseřazeno	
1	Cbb	3
2	DaD	6
3	aDb	7
4	DCa	12
5	CCC	8
6	aDD	11
7	DDb	10
8	aDC	9
9	bbC	0
10	bab	13
11	DbD	0
12	Cba	0
13	aCb	0

	z	k
a	4	12
b	1	13
C	5	9
D	2	11

Pole ukazatelů na začátek a konec seznamu pro každý znak

Aktuálně obě pole přesně registrují stav po seřazení podle 3. znaku.

Ukázka seznamu pro 'b'

Radix sort lze provést bez přesouvání původních dat, pouze manipulací s uvedenými celočíselnými poli, která obsahují veškerou informaci o aktuálním stavu řazení.

Implementace radix sortu

	Neseřazeno	Stav po seřazení podle 2. znaku.	Stav po seřazení podle 1. znaku = seřazeno.
1	Cbb	9	5
2	DaD	0	11
3	aDb	7	8
4	DCa	13	7
5	CCC	0	0
6	aDD	0	0
7	DDb	8	0
8	aDC	6	6
9	bbC	11	0
10	bab	2	9
11	DbD	0	4
12	Cba	1	1
13	aCb	5	3

Stav po seřazení podle 2. znaku:

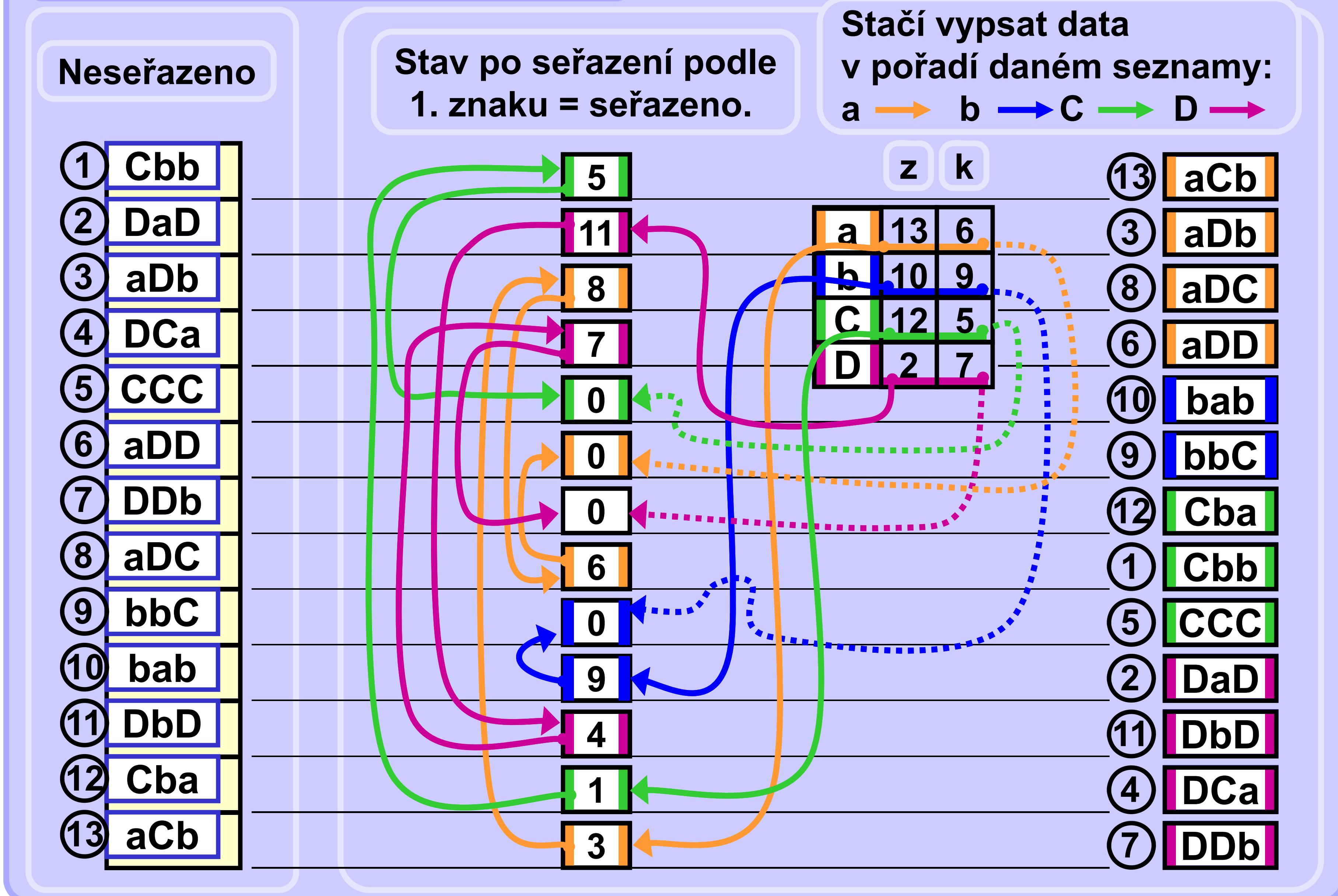
	z	k
a	10	2
b	12	11
C	4	5
D	3	6

Stav po seřazení podle 1. znaku:

	z	k
a	13	6
b	10	9
C	12	5
D	2	7

Ukázka seznamů pro 'b'

Implementace radix sortu



Od seřazení podle 2. znaku k seřazení podle 1. znaku

Pole obsahují uspořádání podle 2. znaku.

	z	k
a	10	2
b	12	11
C	4	5
D	3	6

		d	
1	Cbb	9	4
2	DaD	0	2
3	aDb	7	10
4	DCa	13	7
5	CCC	0	9
6	aDD	0	13
7	DDb	8	11
8	aDC	6	12
9	bbC	11	5
10	bab	2	1
11	DbD	0	6
12	Cba	1	3
13	aCb	5	8

	z1	k1
a	0	0
b	0	0
C	0	0
D	0	0

d1
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0

Pole budou obsahovat uspořádání podle 1. znaku

Aktualizace polí z, k, d proběhne tak, že naplníme nová pole z1, k1, d1, která nakonec zkopírujeme zpět do z, k, d.

Implementačně ovšem není třeba cokoli kopírovat, stačí záměna referencí (ukazatelů, pointerů) na tato pole.

Od seřazení podle 2. znaku k seřazení podle 1. znaku

Usp. dle 2. zn.

	z	k
a	10	2
b	12	11
C	4	5
D	3	6

	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	9	10	9
C	0	0	0	0	0	0	12	12	12	1	12	1	12	1
D	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	11

		d		d1	d1	d1	d1	d1	d1	d1
1	Cbb	9	4	0	0	0	0	0	0	0
2	DaD	0	2	0	0	0	0	0	0	11
3	aDb	7	10	0	0	0	0	0	0	0
4	DCa	13	7	0	0	0	0	0	0	0
5	CCC	0	9	0	0	0	0	0	0	0
6	aDD	0	13	0	0	0	0	0	0	0
7	DDb	8	11	0	0	0	0	0	0	0
8	aDC	6	12	0	0	0	0	0	0	0
9	bbC	11	5	0	0	0	0	0	0	0
10	bab	2	1	0	0	0	0	0	9	9
11	DbD	0	6	0	0	0	0	0	0	0
12	Cba	1	3	0	0	0	0	1	1	1
13	aCb	5	8	0	0	0	0	0	0	0

Od seřazení podle 2. znaku k seřazení podle 1. znaku

Usp. dle 2. zn.

	z	k
a	10	2
b	12	11
C	4	5
D	3	6

		d	
1	Cbb	9	4
2	DaD	0	2
3	aDb	7	10
4	DCa	13	7
5	CCC	0	9
6	aDD	0	13
7	DDb	8	11
8	aDC	6	12
9	bbC	11	5
10	bab	2	1
11	DbD	0	6
12	Cba	1	3
13	aCb	5	8

	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1	z1	k1
a	0	0	13	13	13	13	13	3	13	3	13	8	13	6
b	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9
C	12	1	12	1	12	5	12	5	12	5	12	5	12	5
D	2	4	2	4	2	4	2	4	2	7	2	7	2	7

d1	d1	d1	d1	d1	d1	d1
0	0	5	5	5	5	5
11	11	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	8	8
0	0	0	0	7	7	7
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	6
0	0	0	0	0	0	0
9	9	9	9	9	9	9
4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	3	3	3	3

Hotovo

Implementace radix sortu

```
void radix_sort( String [] a ) {
  int charCount = ...;   // number of chars used (2^16?)
  int [] z =  new int [charCount];
  int [] k =  new int [charCount];
  int [] z1 = new int [charCount];
  int [] k1 = new int [charCount];
  int [] d =  new int [a.length];
  int [] d1 = new int [a.length];
  int [] aux;

  initStep( a, z, k, d );       // 1st pass with last char

  for( int p = a[0].length()-2; p >= 0; p-- ) {
    radixStep( a, p, z, k, d, z1, k1, d1 ); // do the job
    aux = z; z = z1; z1 = aux;      // just swap arrays
    aux = k; k = k1; k1 = aux;      // dtto
    aux = d; d = d1; d1 = aux;      // dtto
  }
  output( a, z, k, d );             // print sorted array
}
```

Implementace radix sortu

```
void initStep( String[] a, int [] z, int [] k, int [] d ){
  int pos = a[0].length()-1;          // last char in string
  int c;                  // char as array index for Radix sort
  for( int i = 0; i < z.length; i++ )     // init arrays
    z[i] = k[i] = -1;      // empty
  for( int i = 0; i < a.length; i++ ){    // all last chars
    c = (int) a[i].charAt(pos);           // char to index
    if( z[c] == -1 )
      k[c]= z[c] = i;                     // start new list
    else {
      d[k[c]] = i;                  // extend existing list
      k[c] = i;
} } }
```

Řetězce různé délky nutno uvést na stejnou délku připojením "nevýznamných znaků", např. mezer.

V ukázkovém kódu všechny indexy polí začínají 0, v obrázcích začínají 1.

Implementace radix sortu

```
void radixStep( String [] a, int pos, int [] z, int [] k,
                int [] d, int [] z1, int [] k1, int [] d1 ){
  int j;         // index traverses old lists
  int c;         // char as array index for Radix sort
  for( int i = 0; i < z.length; i++ )  // init arrays
       z1[i] = k1[i] = -1;              //
  for( int i = 0; i < z.length; i++ )  // for all used chars
    if (z[i] != -1) {                   // unempty list
      j = z[i];
      while( true ){                    // scan the list
        c = (int) a[j].charAt(pos);     // char to index
        if( z1[c] == -1 )
          k1[c]= z1[c] = j;             // start new list
        else {
          d1[k1[c]] = j;               // extend existing list
          k1[c] = j;
        }
        if( j == k[i] ) break;
        j = d[j];                       // next string index
}   } }
```

Radix sort

Shrnutí

d znaků .... d cyklů

cyklus .... $\Theta(n)$ operací

---

celkem .... $\Theta(d \cdot n)$ operací

$d \in O(1)$ $\Rightarrow$ $\Theta(n)$ operací

Radix sort nemění pořadí stejných hodnot

Asymptotická složitost Radix sortu je $\Theta(n*d)$
Pro malé konstantní d lze psát $\Theta(n)$

Je to stabilní řazení

Counting sort

vstup
vstup.length == N

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	3	8	8	6	3	8	10	6	10	8	5

cetnost
cetnost.length == k
k = max(vstup) - min(vstup) + 1

3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	1	2	0	4	0	3

vystup
vstup.length == N

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	5	6	6	8	8	8	8	10	10	10

Counting sort

Krok 1

Vynulování pole četností

3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0

Jeden průchod vstupním polem

10	3	8	8	6	3	8	10	6	10	8	5

Naplnění pole četností

3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	1	2	0	4	0	3

Counting sort

Krok 2

jeden průchod

3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	1	2	0	4	0	3

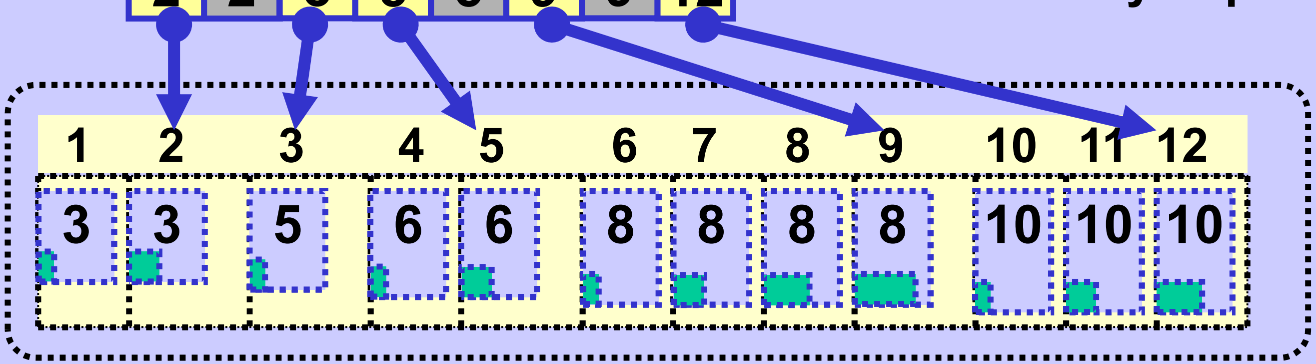
Pole četností mění svou roli

Úprava pole četností

```
for( int i = dMez+1; i <= hMez; i++ )
    cetnost[i] += cetnost[i-1]
```

3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	5	5	9	9	12

Prvek **cetnost[j]** obsahuje pozici posledního prvku s hodnotou **j** v budoucím výstupním poli.



Counting sort

Krok 3

`i == N`

```
for( int i = N; i > 0; i-- ) {
   vystup[cetnost[vstup[i]]] = vstup[i];
   cetnost[vstup[i]]--;
}
```

i == 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	3	8	8	6	3	8	10	6	10	8	5

3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	5	5	9	9	12

→

3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	5	5	9	9	12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5									

Counting sort

Krok 3

i == N-1

```
for( int i = N; i > 0; i-- ) {
   vystup[cetnost[vstup[i]]] = vstup[i];
   cetnost[vstup[i]]--;
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	3	8	8	6	3	8	10	6	10	8	5

i == 11

3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	5	5	9	9	12

3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	5	5	8	9	12

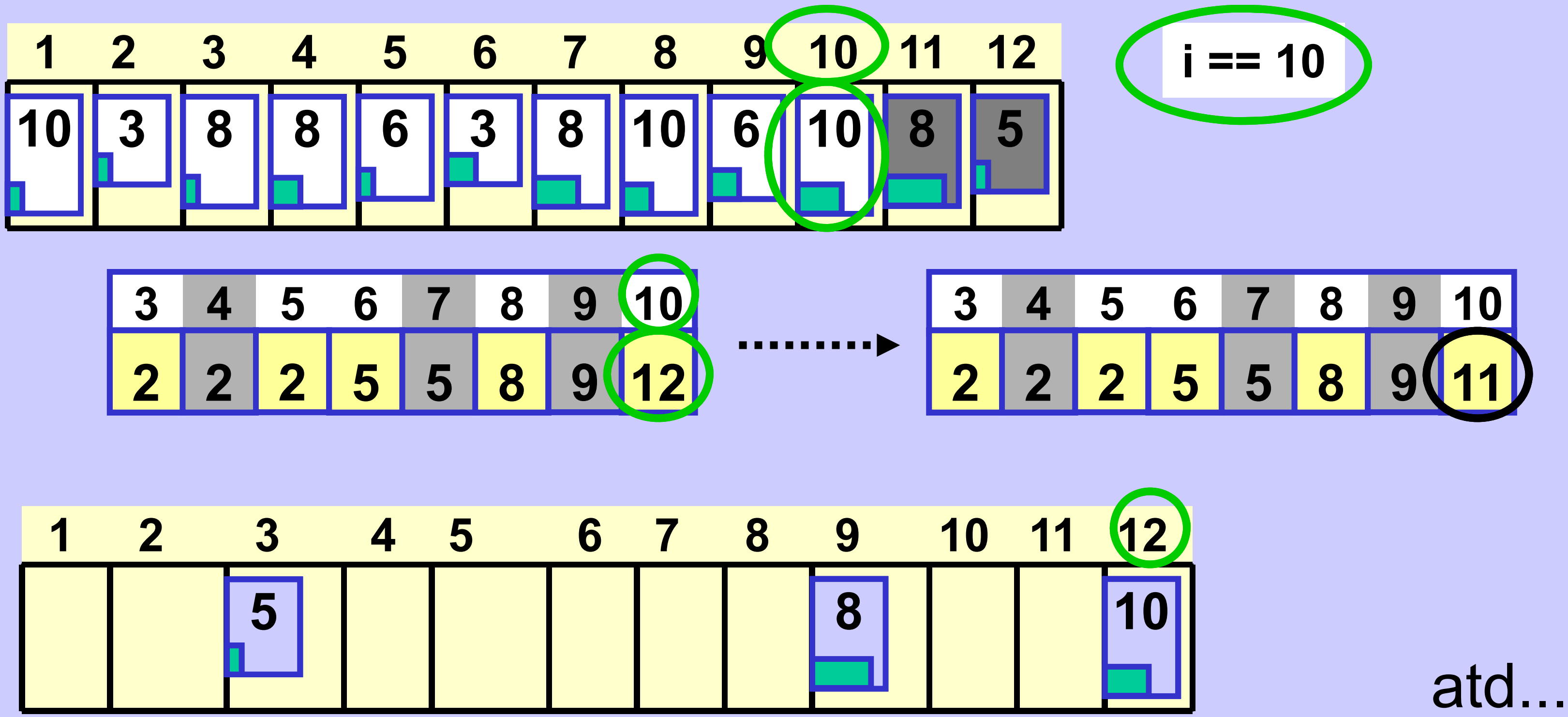
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		5						8			

Counting sort

Krok 3

i == N-2

```
for( int i = N; i > 0; i-- ) {
  vystup[cetnost[vstup[i]]] = vstup[i];
  cetnost[vstup[i]]--;
}
```



Counting sort

Krok 3

i == 3

```
for( int i = N; i > 0; i-- ) {
  vystup[cetnost[vstup[i]]] = vstup[i];
  cetnost[vstup[i]]--;
}
```

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	3	8	8	6	3	8	10	6	10	8	5

i == 3

3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	3	5	6	9	10

3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	2	4	5	5	9	10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	5	6	6	8	8	8	8		10	10

atd...

Orientační přehled vlastností řadících algoritmů

Velikost pole n	Nejhorší případ	Nejlepší případ	"typický", "běžný" případ	Stabilní	Všeobecné
Selection sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	Ne	Ano
Insertion sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	Ano	Ano
Bubble sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	Ano	Ano
Quick sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \cdot \log(n))$	$\Theta(n \cdot \log(n))$	Ne	Ano
Merge sort	$\Theta(n \cdot \log(n))$	$\Theta(n \cdot \log(n))$	$\Theta(n \cdot \log(n))$	Ano	Ano
Heap sort	$\Theta(n \cdot \log(n))$	$O(n \cdot \log(n))$	$\Theta(n \cdot \log(n))$	Ne	Ano
Radix sort	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	Ano	Ne
Counting sort	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	Ano	Ne

Ilustrační experiment řazení

Prostředí

Intel(R) 1.8 GHz, Microsoft Windows XP SP3, jdk 1.6.0_16.

Organizace

Použita řazení, v nichž se prvky (double) navzájem porovnávají.
Kódy převzaty z přednášky (žádné další triky).
Řazení v jednotlivých velikostech prováděna na stejných datech.
Pole náhodně zamíchána generátorem pseudonáhodných čísel
s rovnoměrným rozložením.
Výsledky průměrovány přes větší počet běhů.

Závěr

Neexistuje jedno univerzální řazení, které by bylo optimální
za všech okolností.
Hraje roli stabilita, velikost dat i stupeň předběžného seřazení dat.

Ilustrační experiment řazení

Délka pole	% seř.	Doba běhu v milisekundách, není-li uvedeno jinak					
		Sort					
		Select	Insert	Bubble	Quick	Merge	Heap
10	0%	0.0005	0.0002	0.0005	0.0004	0.0009	0.0005
10	90%	0.0004	0.0001	0.0004	0.0004	0.0007	0.0005
100	0%	0.028	0.016	0.043	0.081	0.014	0.011
100	90%	0.026	0.003	0.030	0.010	0.011	0.011
1 000	0%	2.36	1.30	4.45	0.12	0.19	0.17
1 000	90%	2.31	0.18	2.86	0.16	0.15	0.16
10 000	0%	228	130	450	1.57	2.40	2.31
10 000	90%	229	17.5	285	1.93	1.68	2.11
100 000	0%	22 900	12 800	45 000	18.7	31.4	31.4
100 000	90%	22 900	1 760	28 500	27.4	24.6	25.5
1 000 000	0%	38 min	22 min	75 min	237	385	570
1 000 000	90%	38 min	2.9 min	47.5 min	336	301	381

Seřazená část pole. Pole je nejprve seřazeno,
pak náhodně vybrané prvky změní libovolně hodnotu.

Ilustrační experiment řazení

Délka pole	% seř.	Koeficient zpomalení (>1) vůči Quick sortu pro danou velikost dat a předběžné seřazení					
		Sort					
		Select	◘ Insert	◘ Bubble	Quick	◘ Merge	Heap
10	0%	1.3	★ 0.7	1.4	1	✗ 2.5	1.4
10	90%	1	★ 0.26	0.96	1	✗ 1.8	1.3
100	0%	3.4	✗ 1.8	5.4	★ 1	1.75	1.35
100	90%	2.46	★ 0.28	2.9	1	✗ 1.07	1.07
1 000	0%	20	✗ 11	37.5	★ 1	1.65	1.4
1 000	90%	15	✗ 1.2	18.5	1	★ 0.95	1.03
10 000	0%	146	✗ 83	287	★ 1	1.53	1.48
10 000	90%	118	✗ 9.1	148	1	★ 0.87	1.09
100 000	0%	1 220	✗ 686	2 410	★ 1	1.7	1.7
100 000	90%	837	✗ 64.1	1 040	1	★ 0.9	0.93
1 000 000	0%	9 960	✗ 5 400	19 000	★ 1	1.6	2.41
1 000 000	90%	6 820	521	8 480	1	★ 0.9	1.14

Nejrychlejší ★ Nejpomalejší ✗ Stabilní ◘

Select a Bubble sorty nesoutěží.

Ilustrační experiment řazení

Délka pole	% seř.	Koeficient zpomalení (> 1) při srovnání rychlosti řazení neseřazeného a částečně seřazeného pole					
		Sort					
		Select	Insert	Bubble	Quick	Merge	Heap
10	0%	1	1	1	1	1	1
10	90%	0.8	0.5	0.8	1	0.8	1
100	0%	1	1	1	1	1	1
100	90%	0.9	0.2	0.68	1.27	0.78	1
1 000	0%	1	1	1	1	1	1
1 000	90%	0.98	0.14	0.64	1.31	0.75	0.95
10 000	0%	1	1	1	1	1	1
10 000	90%	1.0	0.14	0.63	1.23	0.7	0.91
100 000	0%	1	1	1	1	1	1
100 000	90%	1.0	0.14	0.63	1.46	0.78	0.81
1 000 000	0%	1	1	1	1	1	1
1 000 000	90%	1.0	0.14	0.63	1.42	0.78	0.67

Stabilní