Základy algoritmizace

4. Abstraktní datové typy

doc. Ing. Jiří Vokřínek, Ph.D.
Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Základy algoritmizace

- Dnes:
  - Abstraktní datové typy
  - Zásobník
  - Fronta
  - Řazení pomocí haldy

Abstraktní datový typ

Abstraktní datový typ

- Datová struktura (typ) je množina dat a operací s těmito daty
- Abstraktní datový typ formálně definuje data a operace s nimi

Nezávisle na konkrétní implementaci

- Příklady:
  - Fronta (queue)
  - Zásobník (stack)
  - Pole (array)
  - Tabulka (table)
  - Seznam (list)
  - Strom (tree)
  - Množina (set)

Abstraktní datový typ

- Abstraktní datový typ je množina dat (hodnot) a příslušných operací, které jsou přesně specifikovány a to **nezávisle na konkrétní implementaci**

- Můžeme definovat:
  - Matematicky – signatura a axiomy
  - Rozhraním (interface) a popisem operací, rozhraní poskytuje:
    - Konstruktor vracející odkaz (na objekt nebo strukturu)

      Objektově orientovaný i procedurální přístup
    - Operace, které akceptují odkaz na argument (data) jako argument a které mají přesně definovaný účinek na data

- Příklad matematického popisu – datový typ Boolean

Matematický popis ADT - Boolean

- Syntax popisuje, jak správně vytvořit logický výraz:
  1. `true` a `false` jsou logické výrazy
  2. Jestliže *x* a *y* jsou logické výrazy, pak

     I. !(*x*) – negace
     II. (*x* & *y*) – logický součin `and`
     III. (*x* | *y*) – logický součet `or`
     IV. (*x* == *y*), (*x* != *y*) – relační operátory

     jsou logické výrazy

Pokud se chceme vyhnout psát u každé operace závorky, musíme definovat priority operátorů

Konkrétní implementace se může syntakticky lišit – viz. ! vs. not, atp.

Matematický popis ADT - Boolean

- Sémantika popisuje význam jednotlivých operací

- Můžeme definovat axiomy:
  - true == true : `true`
  - false == false : `true`
  - true == false : `false`
  - false == true : `false`
  - !(true) : `false`
  - x & false : `false`
  - x & y : y & x
  - x | false : x
  - !(false) : `true`
  - x & true : x
  - x | y : y | x
  - x | true : `true`

Abstraktní datový typ - vlastnosti

- Počet datových položek může být
  - Neměnný – statický datový typ – počet položek je konstantní

    Např. pole, řetězec, třída, …
  - Proměnný – dynamický datový typ – počet položek se mění v závislosti na provedené operaci

    Např. vložení nebo odebrání určitého prvku
- Typ položek (dat) může být
  - Homogenní – všechny položky jsou stejného typu
  - Nehomogenní – položky můžou být různých typů
- Existence bezprostředního následníka je
  - Lineární – existuje bezprostřední následník prvku, např. pole, fronta, seznam, …
  - Nelineární – neexistuje přímý jednoznačný následník, např. strom

Abstraktní datový typ jako objekt

- Objekt je instancí třídy
  - Třída je vzor – má rozhraní, data (vnitřní proměnné), metody (funkce)

Objektově orientované programování

… více v B0B36PJV a B6B36OMO

```
class MyAbstractDataType:
    def __init__(self):
        self.dataOne = 1
        self.dataTwo = 2

    def operationOne(self, argument):
        self.dataOne = argument

    def operationTwo(self):
        return self.dataTwo

myData = MyAbstractDataType()
myData.operationOne(42)
myData.operationTwo()
```

Abstraktní datový typ jako objekt

- Objekt je instancí třídy
  - Třída je vzor – má rozhraní, data (vnitřní proměnné), metody (funkce)

konstruktor

Objektově orientované programování

… více v B0B36PJV a B6B36OMO

```
class MyAbstractDataType:
    def __init__(self):
        self.dataOne = 1
        self.dataTwo = 2

    def operationOne(self, argument):
        self.dataOne = argument

    def operationTwo(self):
        return self.dataTwo

myData = MyAbstractDataType()
myData.operationOne(42)
myData.operationTwo()
```

inicializace atributů

definice metod

self odkazuje na „sebe sama“

Zásobník

Zásobník

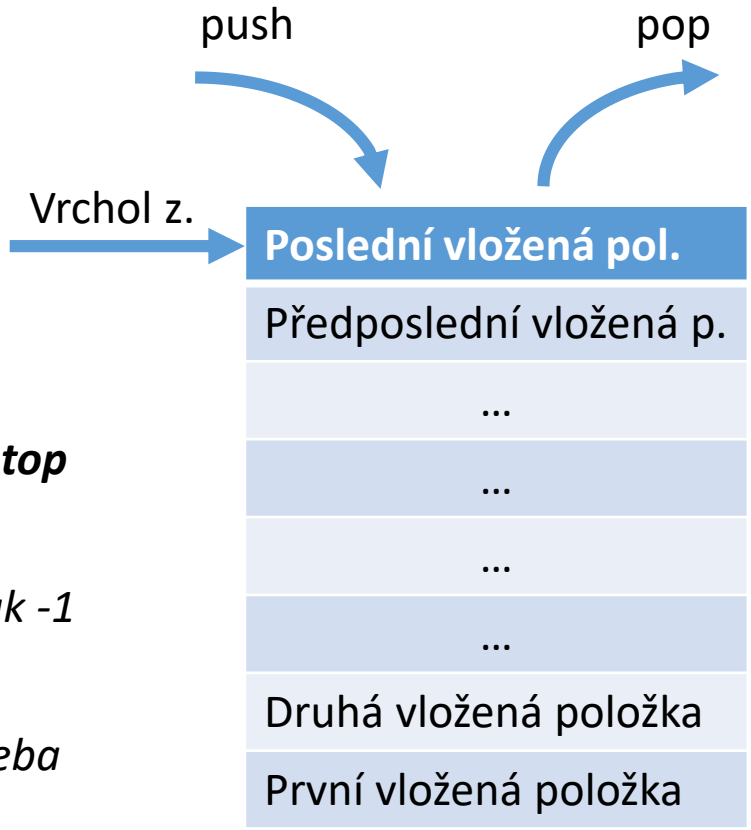
- Dynamická datová struktura umožňující vkládání a odebírání hodnot tak, že naposledy vložená hodnota se odebere jako první

LIFO – Last In, First Out

- Základní operace
  - Vložení hodnoty na vrchol zásobníku
  - Odebrání hodnoty z vrcholu zásobníku
  - Test prázdnosti zásobníku

Zásobník

- Základní operace
  - push – vložení hodnoty na vrchol zásobníku
  - pop – odebrání hodnoty z vrcholu zásobníku
  - isEmpty – test prázdnosti zásobníku



- Další operace mohou být
  - peek – čtení hodnoty z vrcholu

    *Alternativně také třeba **top***
  - search – vrátí pozici prvku

    Pokud se nachází v zásobníku, jinak -1
  - size – aktuální počet prvků

    Nebývá potřeba

Zásobník

- Příklad implementace pomocí List
  - push ≈ append
  - pop ≈ pop
  - isEmpty ≈ not len(stack)

```
stack = []
stack.append("dela")
stack.append("to")
stack.append("co")
stack.append("vime")

while len(stack):
    print(stack.pop())
```

Uměli byste implementovat zásobník pomocí pole?

Zásobník

- Příklad implementace s definicí rozhraní

```
class Stack:
    def __init__(self):
        self.items = []

    def push(self, item):
        self.items.append(item)

    def pop(self):
        return self.items.pop()

    def isEmpty(self):
        return (self.items == [])
```

```
s = Stack()
s.push("dela")
s.push("to")
s.push("co")
s.push("vime")

while not s.isEmpty():
    print(s.pop())
```

Zásobník

- Příklad použití – kontrola vyvážení závorek

```
def parChecker(symbolString):
    s = Stack()
    for symbol in symbolString:
        if symbol == "(":
            s.push(symbol)
        elif symbol == ")":
            if s.isEmpty():
                return False
            else:
                s.pop()
    return s.isEmpty()
```

```
parChecker('(3+(2*(-2)+(3*5)-1)/(3-2)*2)')
parChecker('((3+2)+(5*8)*(4)')
```

Fronta

Fronta

- Dynamická datová struktura umožňující vkládání a odebírání hodnot v pořadí, v jakém byly vloženy

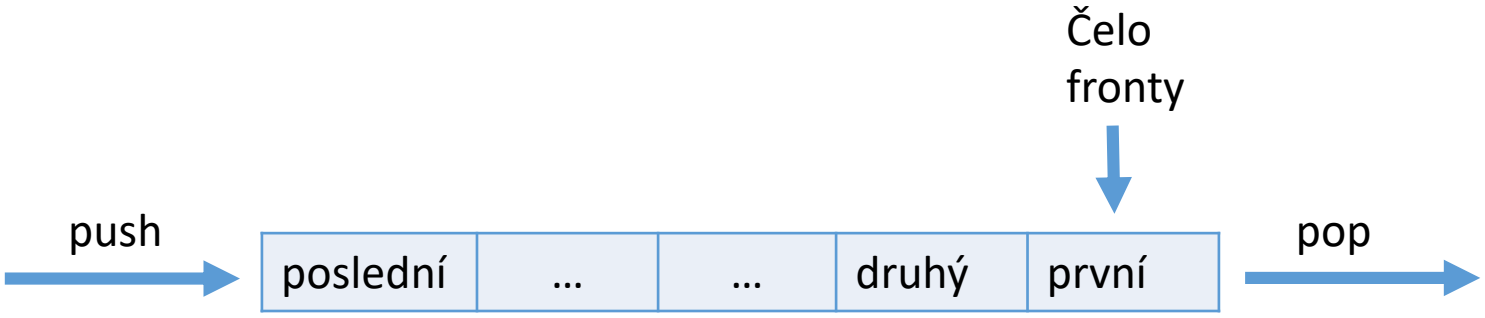
FIFO – First In, First Out

- Základní operace
  - Vložení hodnoty na konec fronty
  - Odebrání hodnoty z čela fronty
  - Test prázdnosti fronty

Fronta

- Základní operace
  - push – vložení hodnoty na konec fronty (nebo též enqueue)
  - pop – odebrání hodnoty z čela fronty (nebo též dequeue)
  - isEmpty – test prázdnosti fronty

- Další operace mohou být
  - peek – čtení hodnoty z čela
  - back – čtení hodnoty z konce



Fronta

- Příklad implementace pomocí List
  - push ≈ append
  - pop ≈ pop(0)
  - isEmpty ≈ not len(stack)

```
queue = []
queue.append("dela")
queue.append("to")
queue.append("co")
queue.append("vime")

while len(queue):
    print(queue.pop(0))
```

Pozor, operace pop(0) je pomalá – víte proč?

Fronta

- Příklad implementace s definicí rozhraní

Jaký je rozdíl v použití seznamu oproti minulému příkladu?

```
class Queue:
    def __init__(self):
        self.items = []

    def isEmpty(self):
        return self.items == []

    def enqueue(self, item):
        self.items.insert(0,item)

    def dequeue(self):
        return self.items.pop()

    def size(self):
        return len(self.items)
```

```
q = Queue()
q.enqueue("dela")
q.enqueue("to")
q.enqueue("co")
q.enqueue("vime")

while not q.isEmpty():
    print(q.dequeue())
```

Fronta

- Rozšíření – prioritní fronta
  - Prvky jsou odebírány na základě priority (např. velikosti)

Jak to lze naimplementovat?

  - Hledání největšího prvku při odebírání
  - Seřazení po vložení
  - Seřazení při vložení

Určitě to jde lépe s pomocí složitějších struktur

Binární Halda

Binární Halda

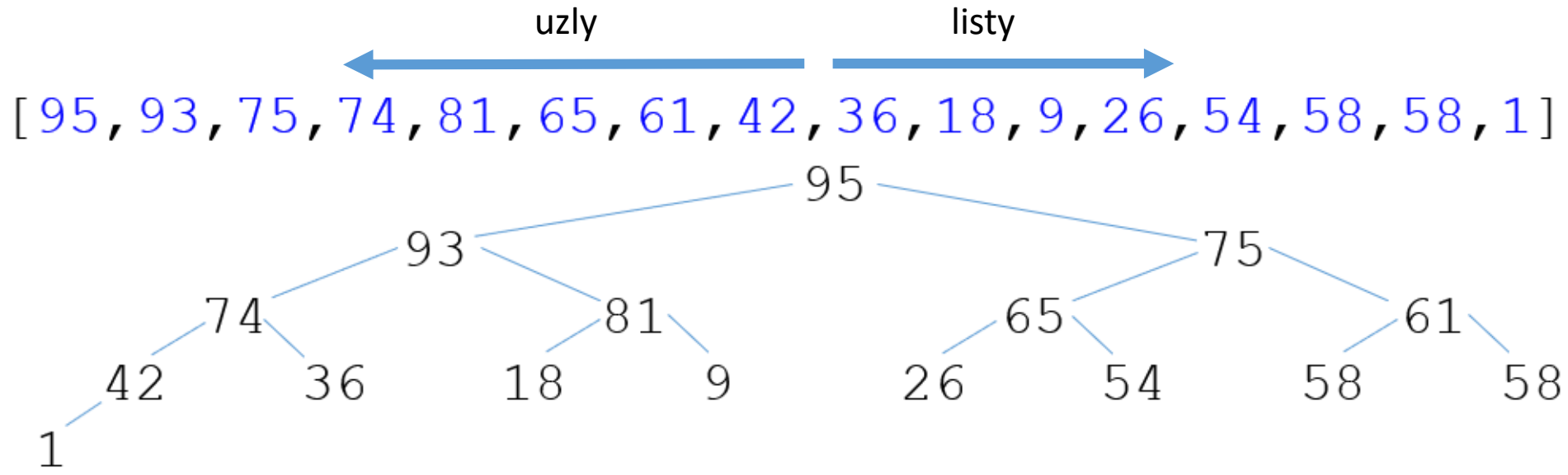
- Halda
  - Binární strom, kde každý prvek je větší než jeho následovníci
  - Je vyvážený
  - Každý prvek je co nejvíce vlevo
  - Implementujeme pomocí pole, kde potomci prvku *n* jsou na pozici 2n+1 a 2n+2

- Základní operace
  - make – vytvoření haldy
  - min, max – vrátí minimální, resp. maximální prvek
  - push/pop/insert/delete – přidání, resp. odebrání prvku

Binární Halda

- Tvorba haldy
  - Halda – pole prvků $h_1, \dots, h_n$, kde $h_{n/2-1}, \dots, h_n$ jsou listy
  - Je třeba zajistit vlastnosti haldy – pro $h_{n/2-2}$ až h_1 kontrolujeme přípustnost – výměna prvků

- Příklad: n=16, n/2-1=7, indexace od 0, potomci 2i+1,2i+2



Binární Halda

- Tvorba haldy
  - Halda – pole prvků h_1, … , h_n, kde $h_{n/2-1}$, … , h_n jsou listy
  - Je třeba zajistit vlastnosti haldy – pro $h_{n/2-2}$ až h_1 kontrolujeme přípustnost – výměna prvků

```
for start in range((len(array)-2)//2, -1, -1):
  movedown(array, start, len(array)-1)
```

Binární Halda

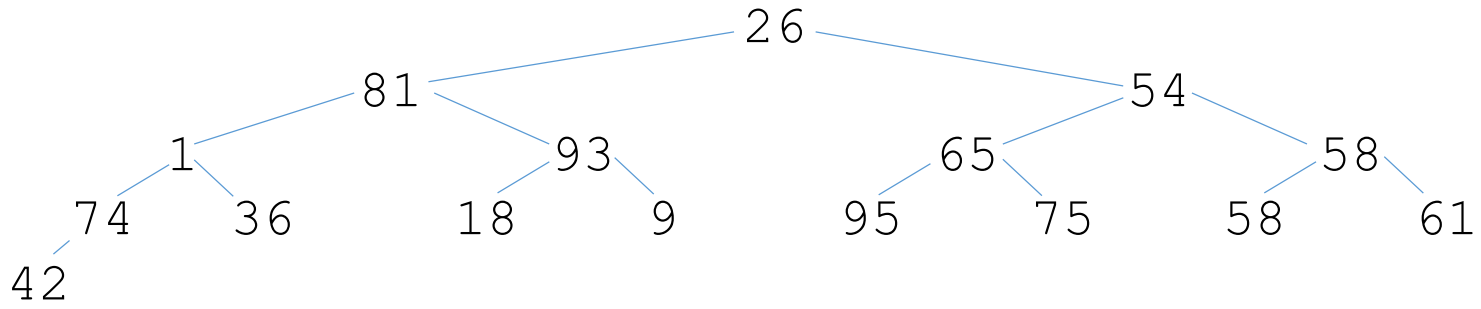
- Tvorba haldy
  - Halda – pole prvků h_1, … , h_n, kde $h_{n/2-1}$, … , h_n jsou listy
  - Je třeba zajistit vlastnosti haldy – pro $h_{n/2-2}$ až h_1 kontrolujeme přípustnost – výměna prvků

```
def movedown(array, start, end):
  root = start
  while True:
   child = root * 2 + 1
   if child > end: break
   if child + 1 <= end and array[child] < array[child + 1]:
     child += 1
   if array[root] < array[child]:
     array[root], array[child] = array[child], array[root]
     root = child
   else:
     break
```

Binární Halda

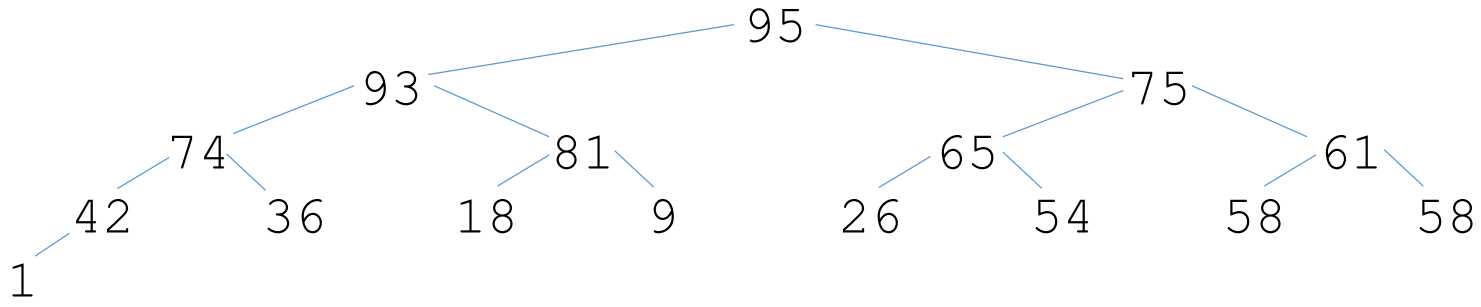
- Vstup

[26,81,54,1,93,65,58,74,36,18,9,95,75,58,61,42]



- Heap

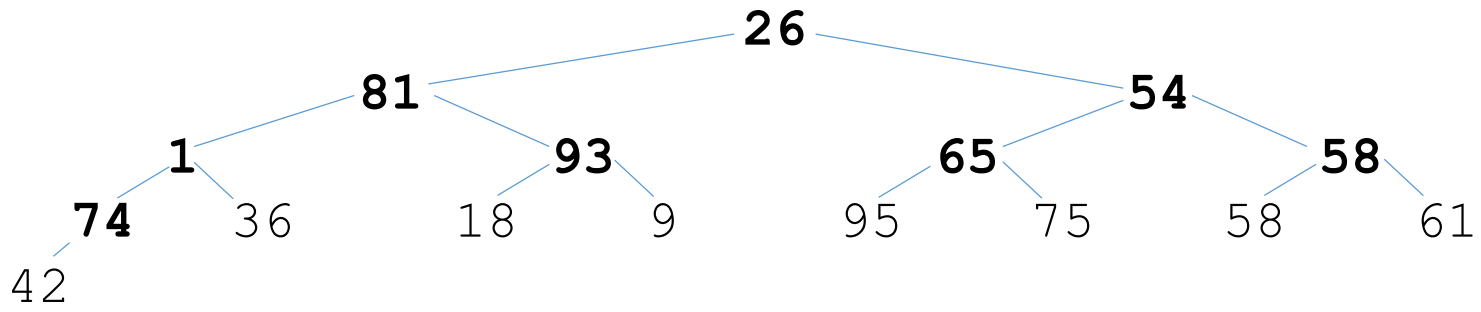
[95,93,75,74,81,65,61,42,36,18,9,26,54,58,58,1]



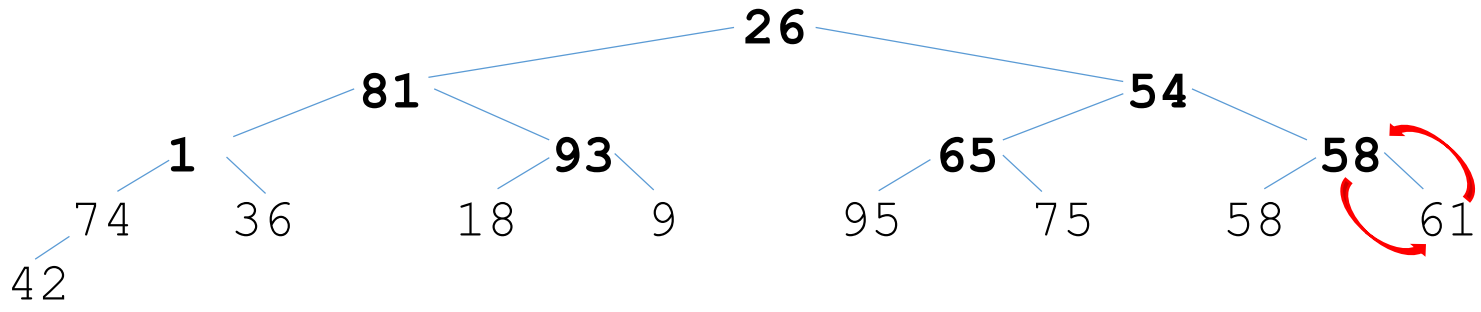
Binární Halda

- Tvorba haldy ($h_{n/2-2}$ až h_1)

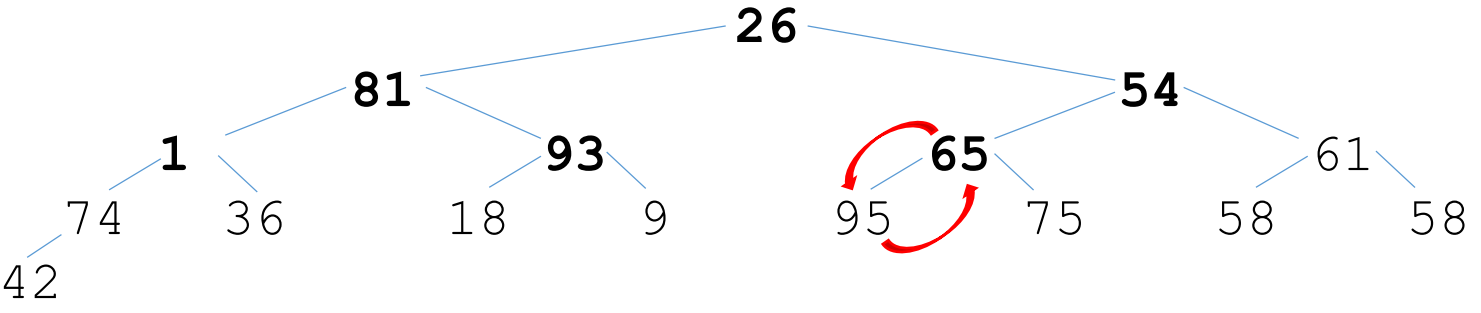
[**26**,**81**,**54**,**1**,**93**,**65**,**58**,**74**,36,18,9,95,75,58,61,42]



[**26**,**81**,**54**,**1**,**93**,**65**,**58**,74,36,18,9,95,75,58,61,42]



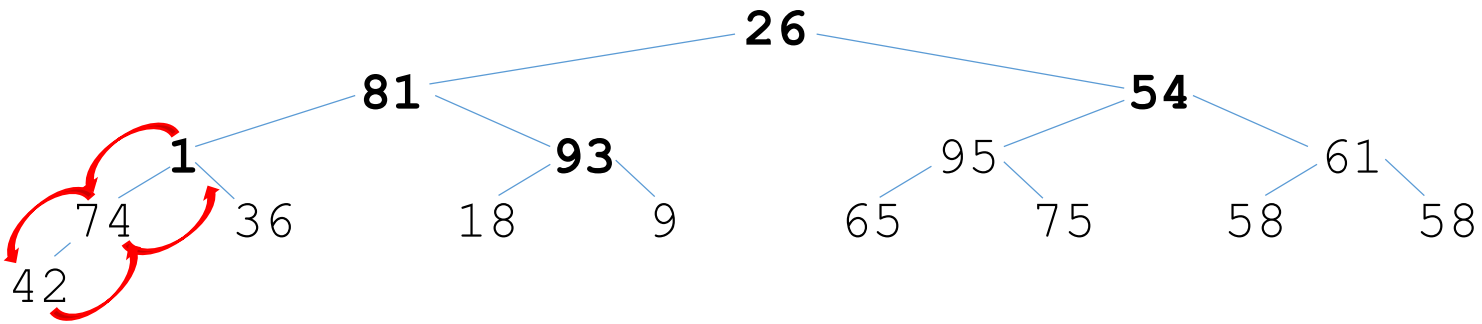
[**26**,**81**,**54**,**1**,**93**,**65**,61,74,36,18,9,95,75,58,58,42]



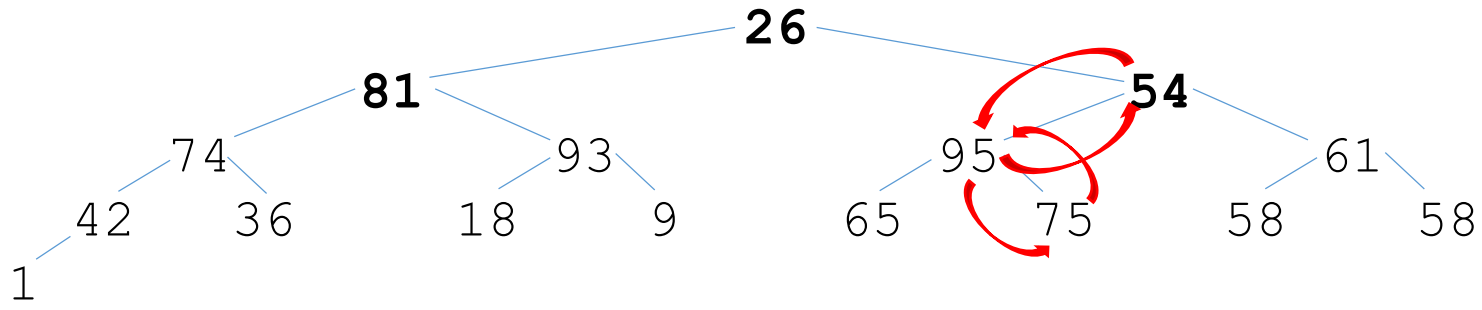
Binární Halda

- Tvorba haldy ($h_{n/2-2}$ až h_1)

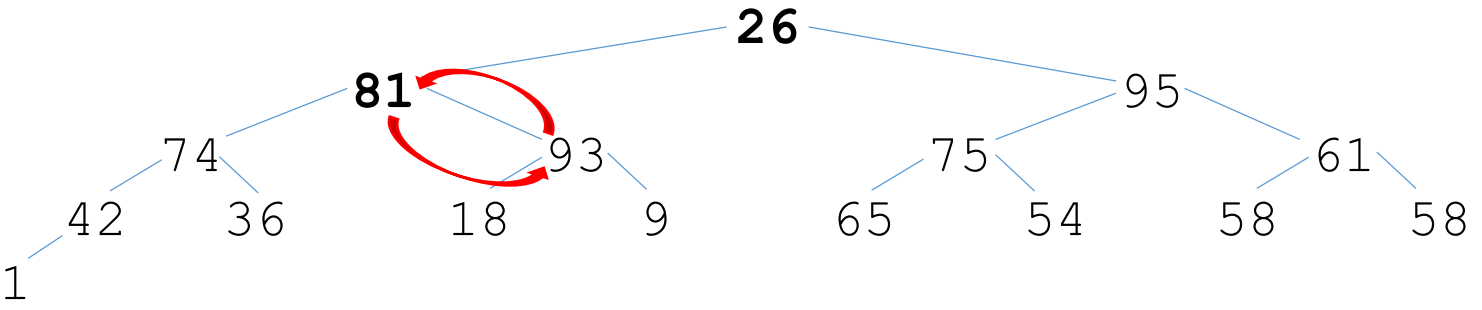
[**26**,**81**,**54**,**1**,**93**,95,61,74,36,18,9,65,75,58,58,42]



[**26**,**81**,**54**,74,93,95,61,42,36,18,9,65,75,58,58,1]



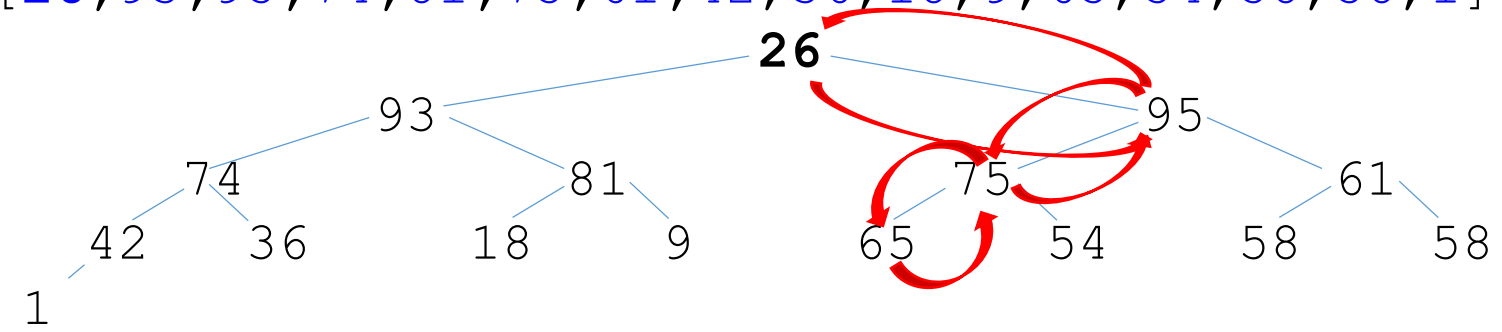
[**26**,**81**,95,74,93,75,61,42,36,18,9,65,54,58,58,1]



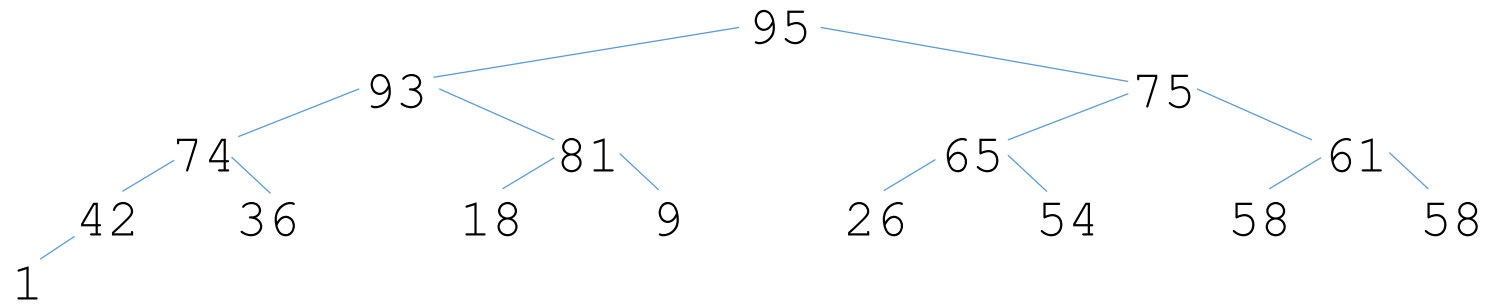
Binární Halda

- Tvorba haldy ($h_{n/2-2}$ až h_1)

[**26**,93,95,74,81,75,61,42,36,18,9,65,54,58,58,1]



[95,93,75,74,81,65,61,42,36,18,9,26,54,58,58,1]



Heap Sort

Heap Sort

- Řazení pomocí převodu na binární haldu
- Implementujeme pomocí pole, kde potomci prvku *n* jsou na pozici 2n+1 a 2n+2

- Vyjímáním max. elementu budujeme setříděný seznam
  - Pokud není halda prázdná, zaměníme první a poslední prvek
  - „spravíme“ haldu

- Není stabilní

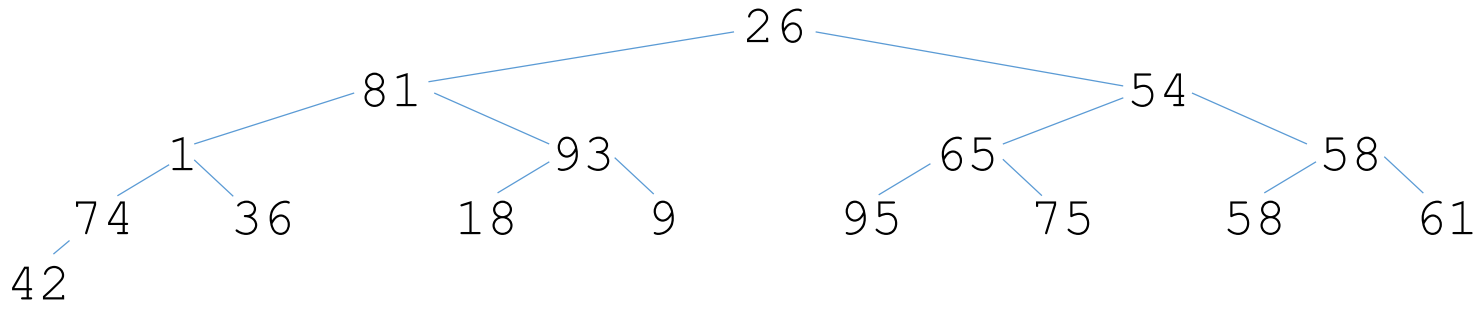
Heap Sort

- Tvorba haldy
  - Halda – pole prvků $h_1, \dots, h_n$, kde $h_{n/2-1}, \dots, h_n$ jsou listy
  - Je třeba zajistit vlastnosti haldy – pro $h_{n/2-2}$ až h_1 kontrolujeme přípustnost – výměna prvků
- Po výměně prvku je třeba opět kontrola haldy
  - Kontrolujeme přípustnost pro h_1
- Zajištění přípustnosti
  - pokud je daný prvek menší než některý z jeho následníků, vyměníme je a kontrolujeme přípustnost vyměněného následníka

Heap Sort

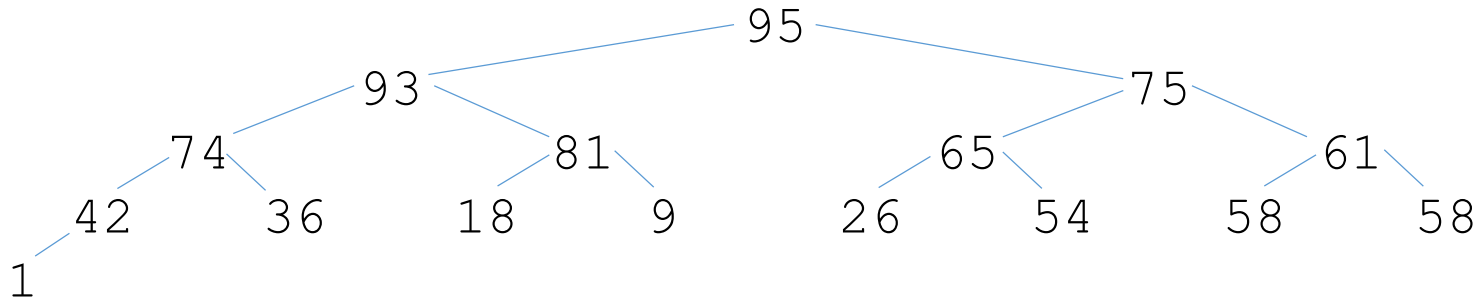
- Vstup

[26,81,54,1,93,65,58,74,36,18,9,95,75,58,61,42]



- Heap

[95,93,75,74,81,65,61,42,36,18,9,26,54,58,58,1]



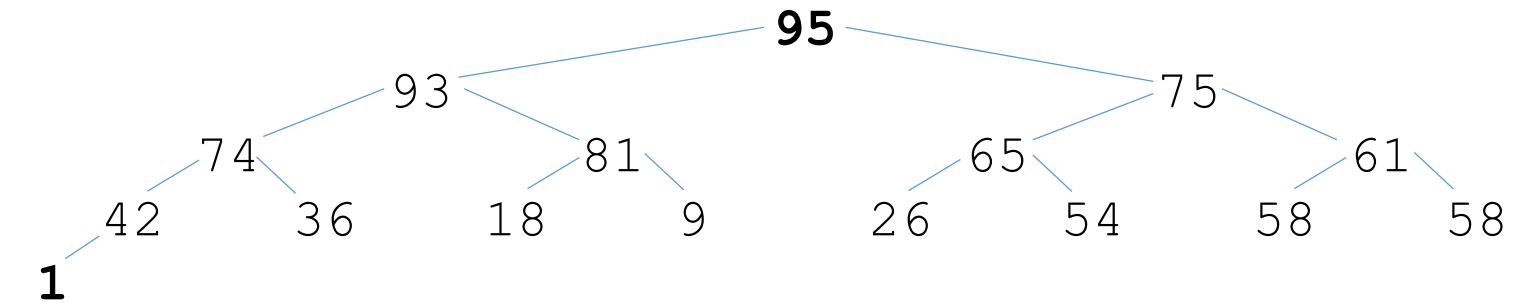
- Výstup

[1,9,18,26,36,42,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]

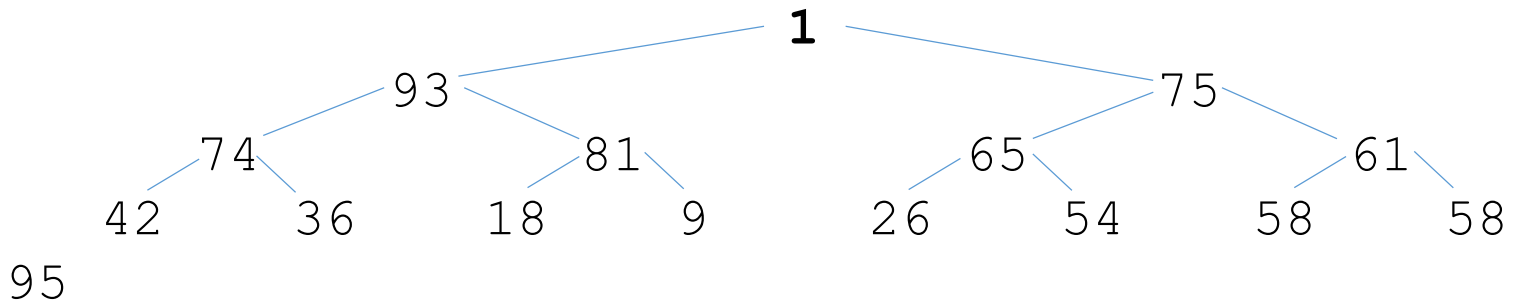
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

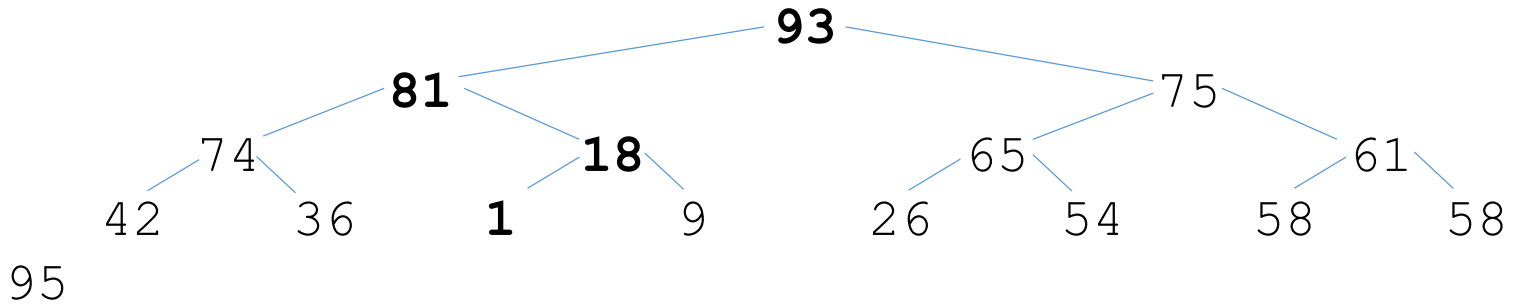
[**95**,93,75,74,81,65,61,42,36,18,9,26,54,58,58,**1**]



[1,93,75,74,81,65,61,42,36,18,9,26,54,58,58,95]



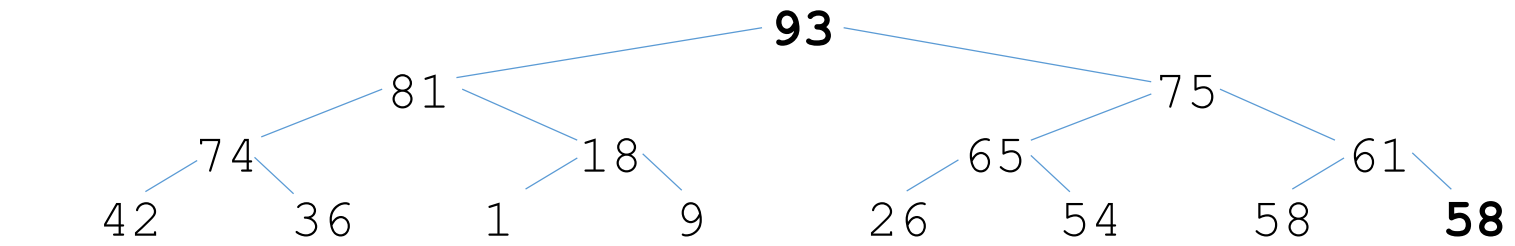
[**93**,**81**,75,74,**18**,65,61,42,36,**1**,9,26,54,58,58,95]



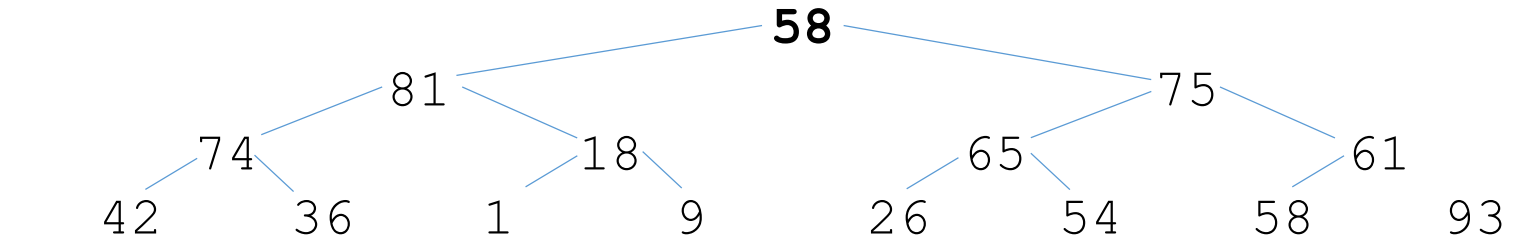
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

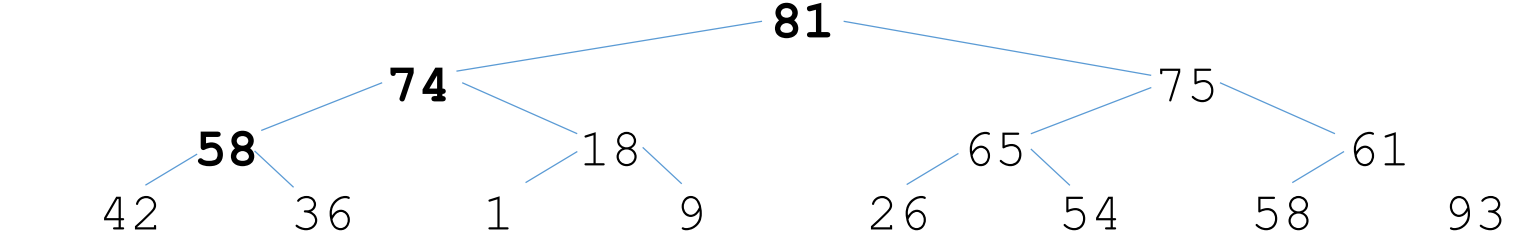
[**93**,81,75,74,18,65,61,42,36,1,9,26,54,58,**58**,95]



[58,81,75,74,18,65,61,42,36,1,9,26,54,58,93,95]



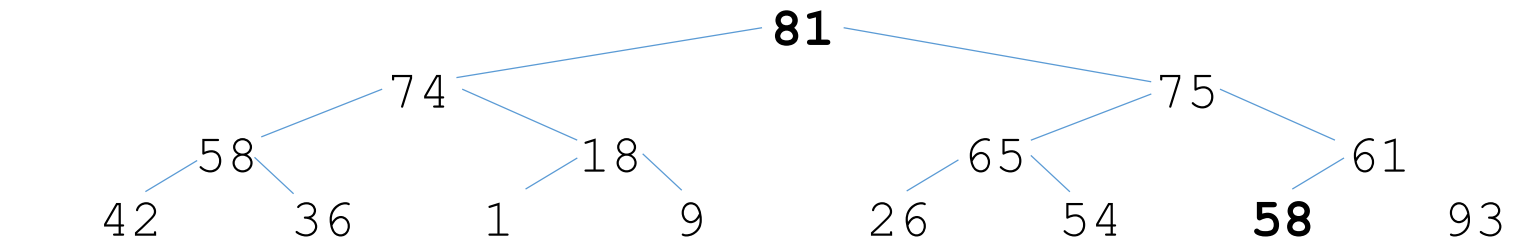
[**81**,**74**,75,**58**,18,65,61,42,36,1,9,26,54,58,93,95]



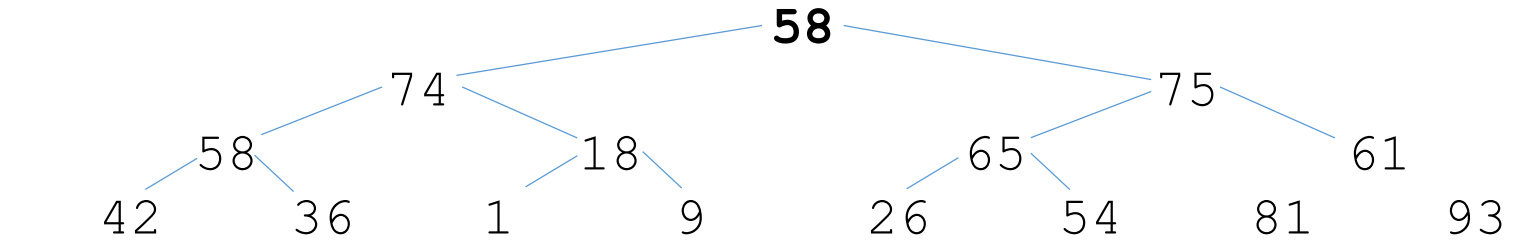
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

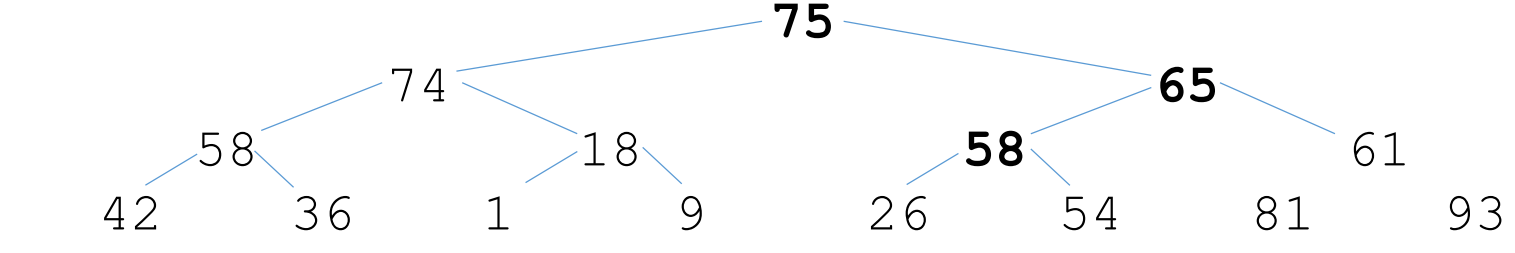
[**81**,74,75,58,18,65,61,42,36,1,9,26,54,**58**,93,95]



[58,74,75,58,18,65,61,42,36,1,9,26,54,81,93,95]



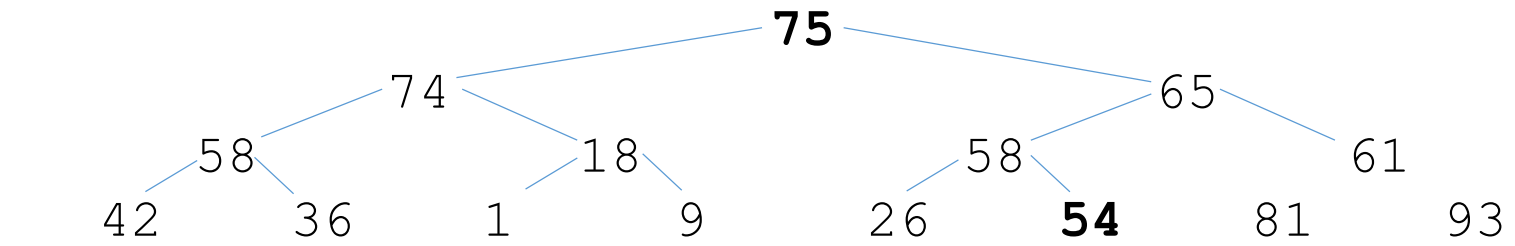
[**75**,74,**65**,58,18,**58**,61,42,36,1,9,26,54,81,93,95]



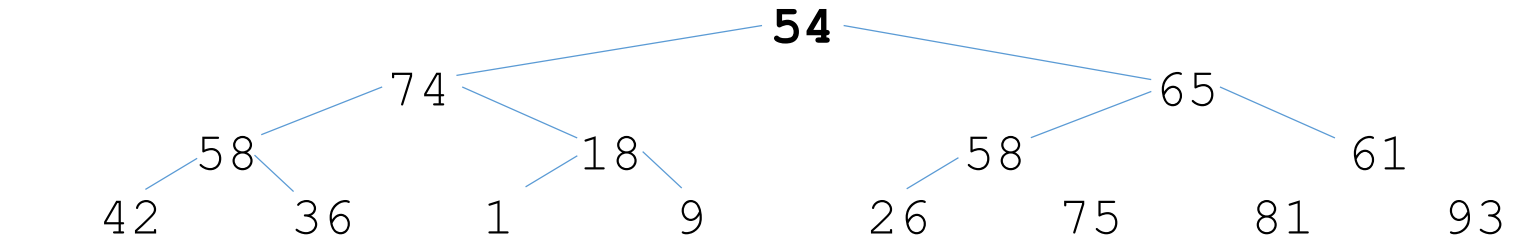
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

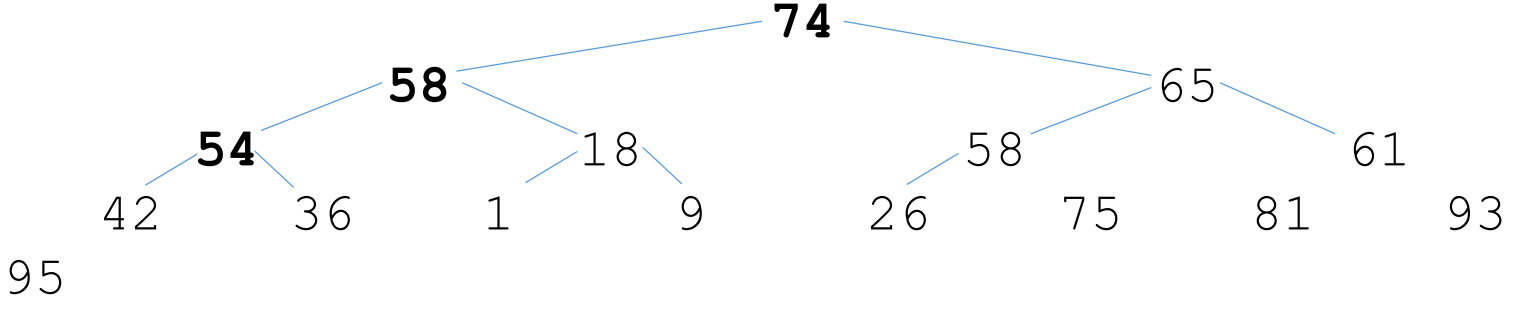
[**75**,74,65,58,18,58,61,42,36,1,9,26,**54**,81,93,95]



[54,74,65,58,18,58,61,42,36,1,9,26,75,81,93,95]



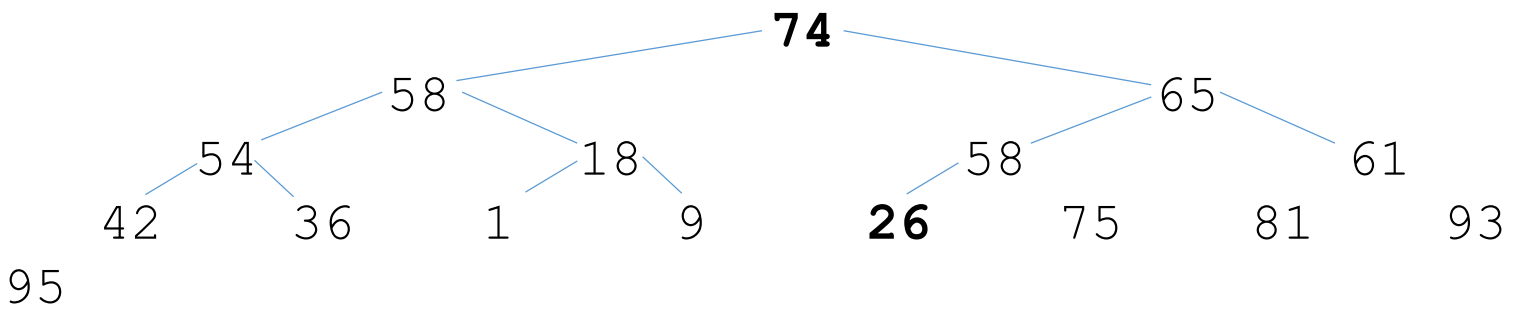
[**74**,**58**,65,**54**,18,58,61,42,36,1,9,26,75,81,93,95]



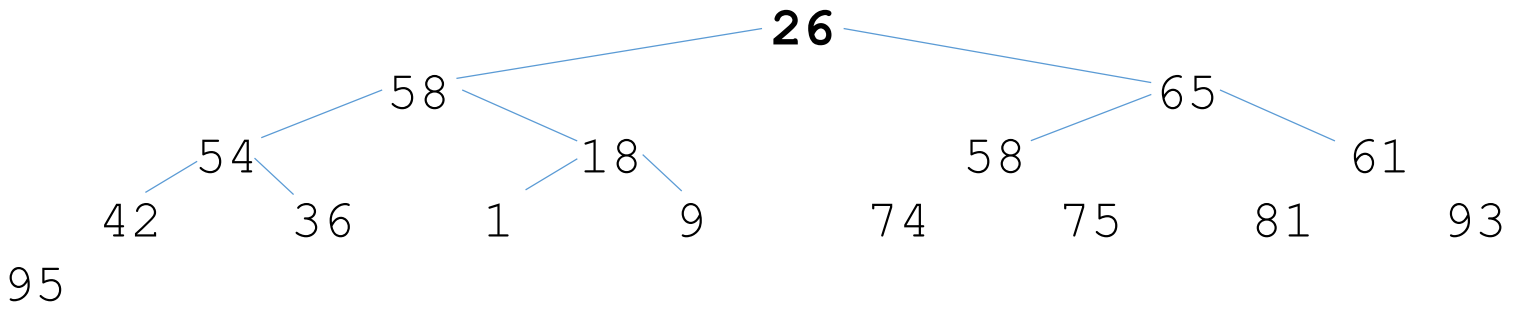
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

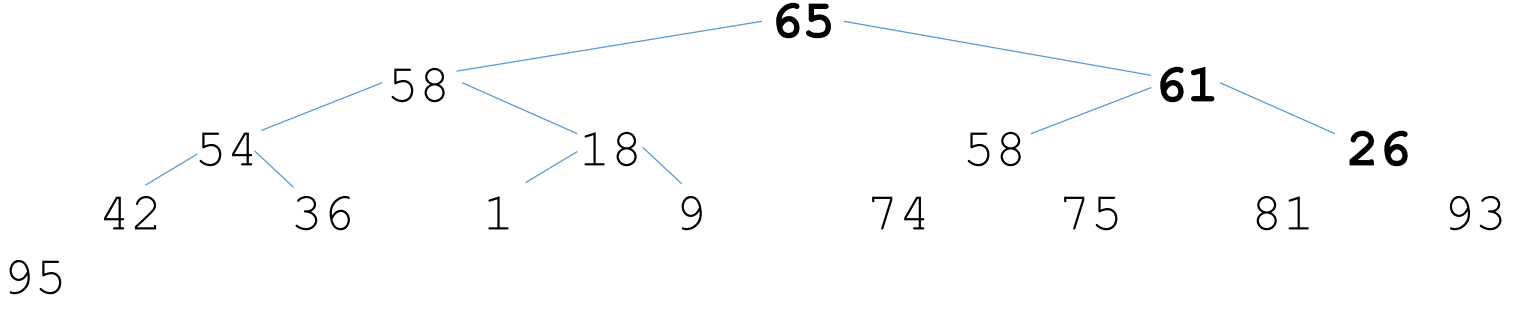
[**74**,58,65,54,18,58,61,42,36,1,9,**26**,75,81,93,95]



[26,58,65,54,18,58,61,42,36,1,9,74,75,81,93,95]



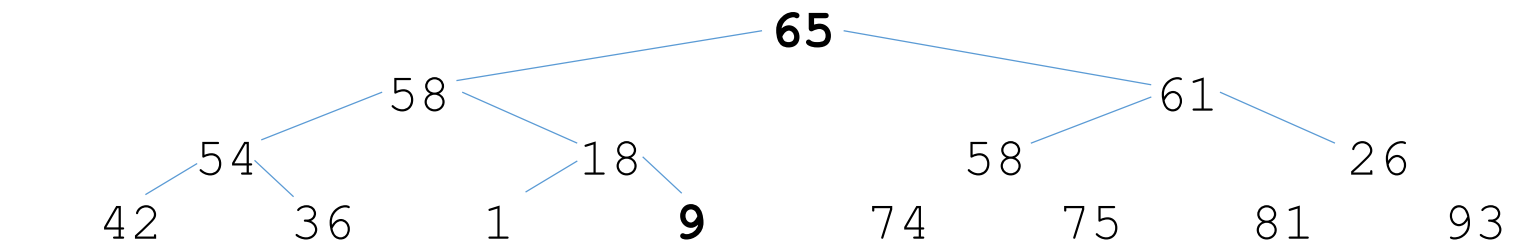
[**65**,58,**61**,54,18,58,**26**,42,36,1,9,74,75,81,93,95]



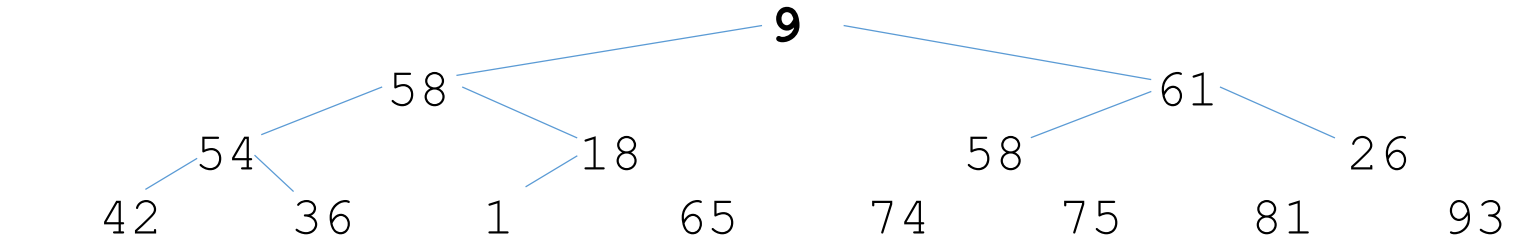
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

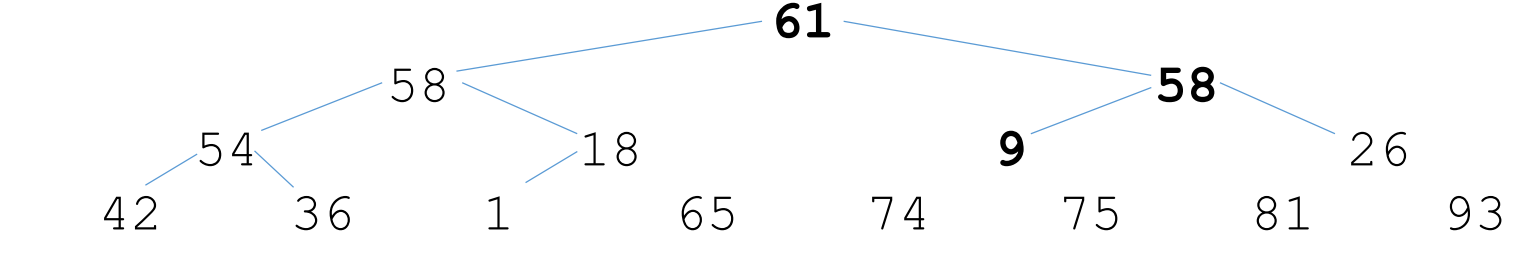
[**65**,58,61,54,18,58,26,42,36,1,**9**,74,75,81,93,95]



[65,58,61,54,18,58,26,42,36,1,9,74,75,81,93,95]



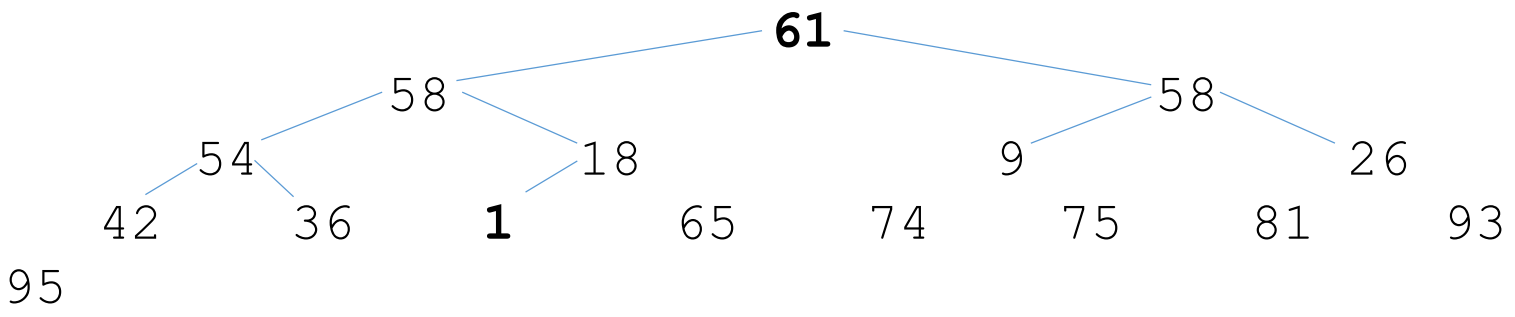
[**61**,58,**58**,54,18,**9**,26,42,36,1,65,74,75,81,93,95]



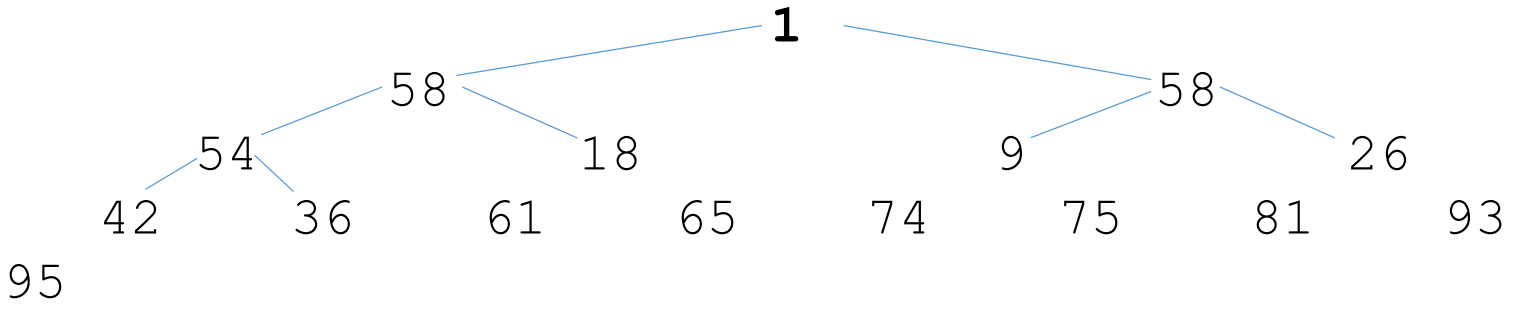
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

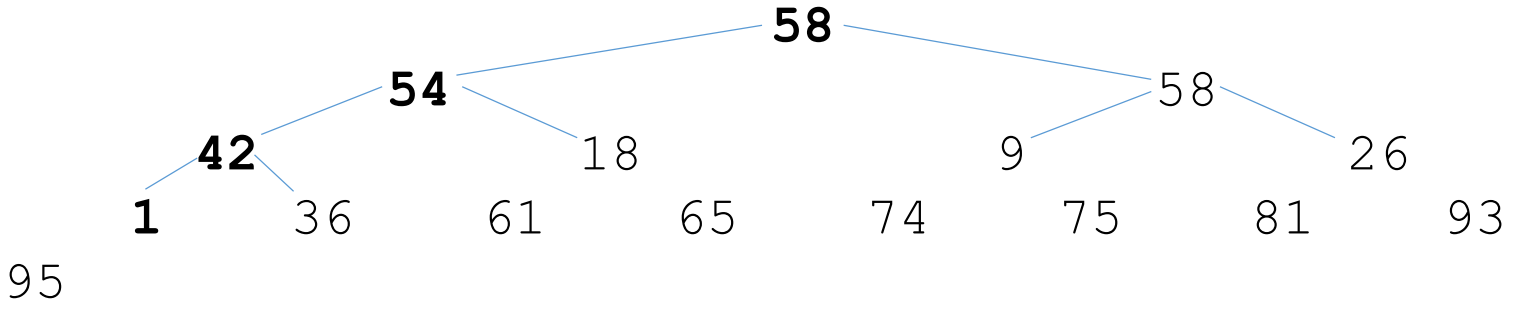
[**61**,58,58,54,18,9,26,42,36,**1**,65,74,75,81,93,95]



[1,58,58,54,18,9,26,42,36,61,65,74,75,81,93,95]



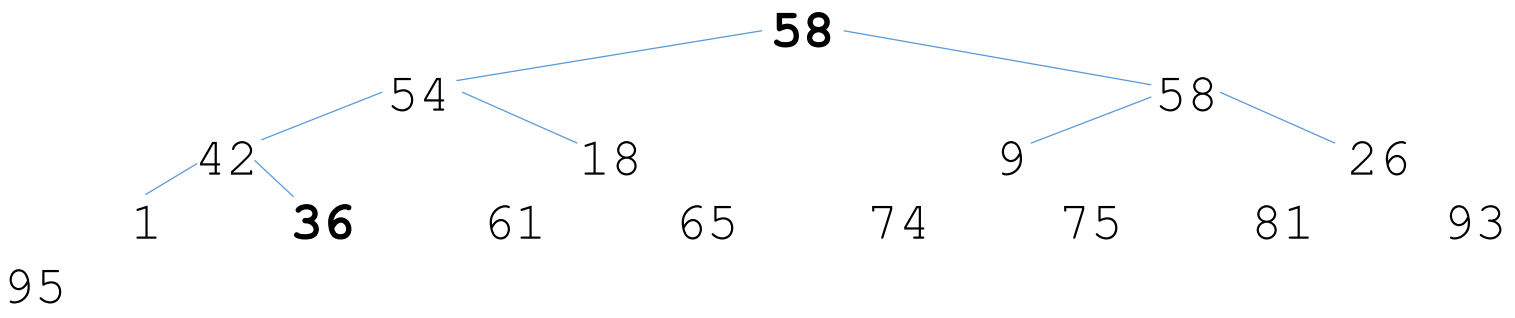
[**58**,**54**,58,**42**,18,9,26,**1**,36,61,65,74,75,81,93,95]



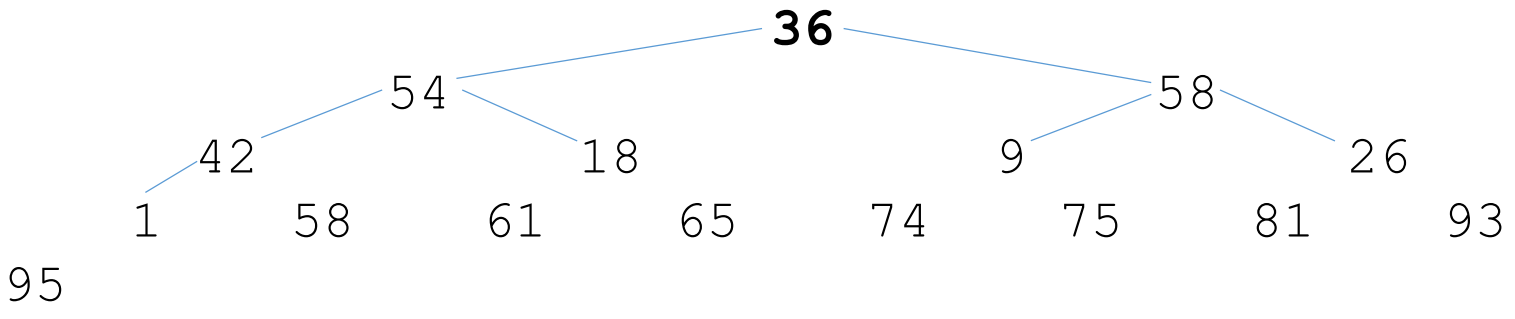
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

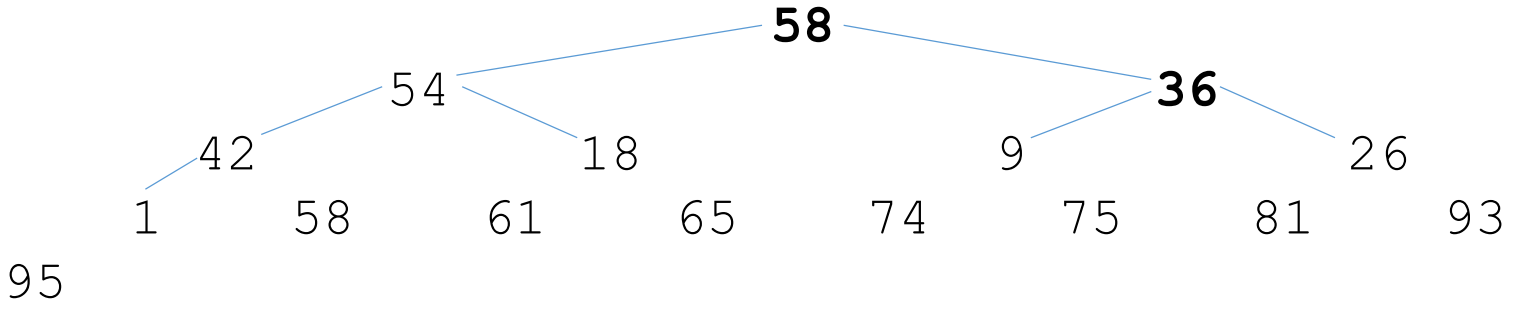
[**58**,54,58,42,18,9,26,1,**36**,61,65,74,75,81,93,95]



[36,54,58,42,18,9,26,1,58,61,65,74,75,81,93,95]

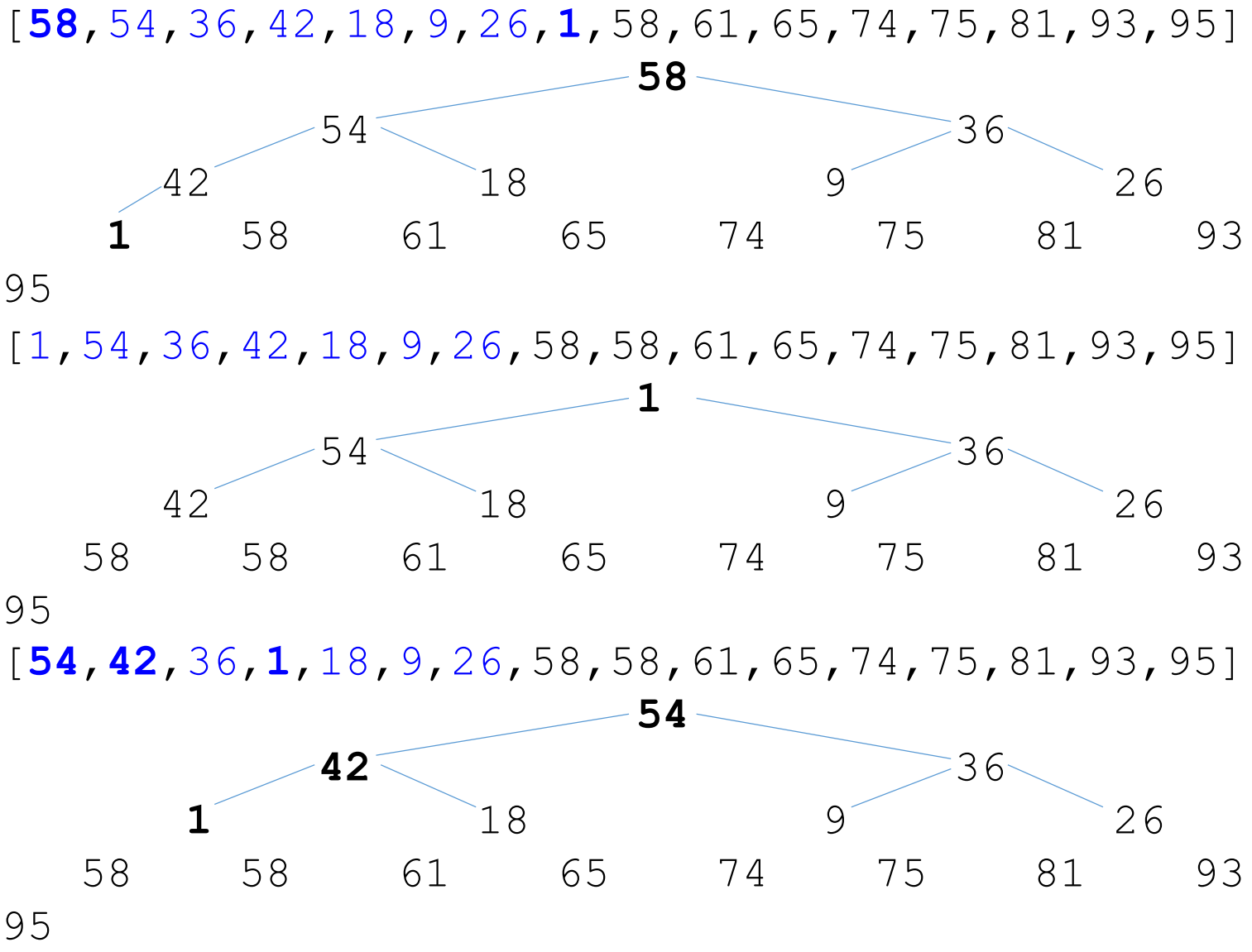


[**58**,54,**36**,42,18,9,26,1,58,61,65,74,75,81,93,95]



Heap Sort

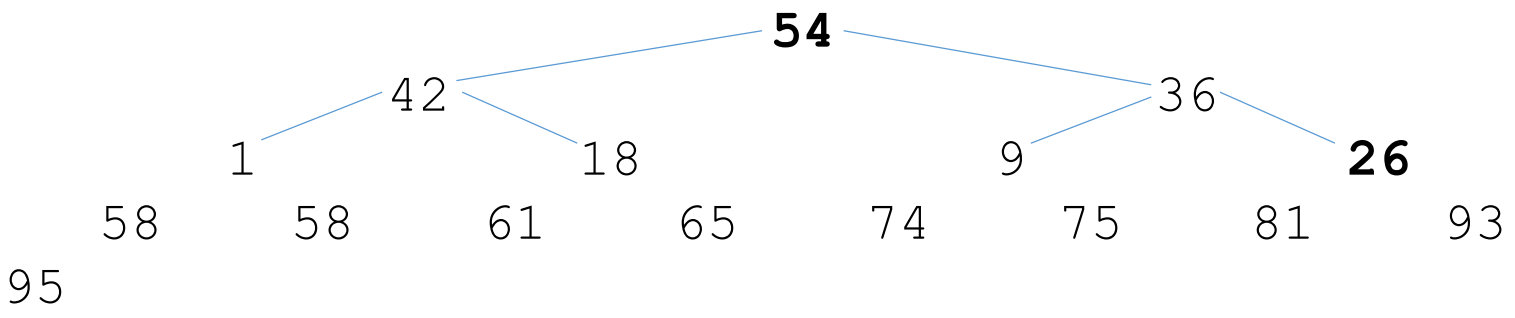
- Výběr prvku a kontrola haldy



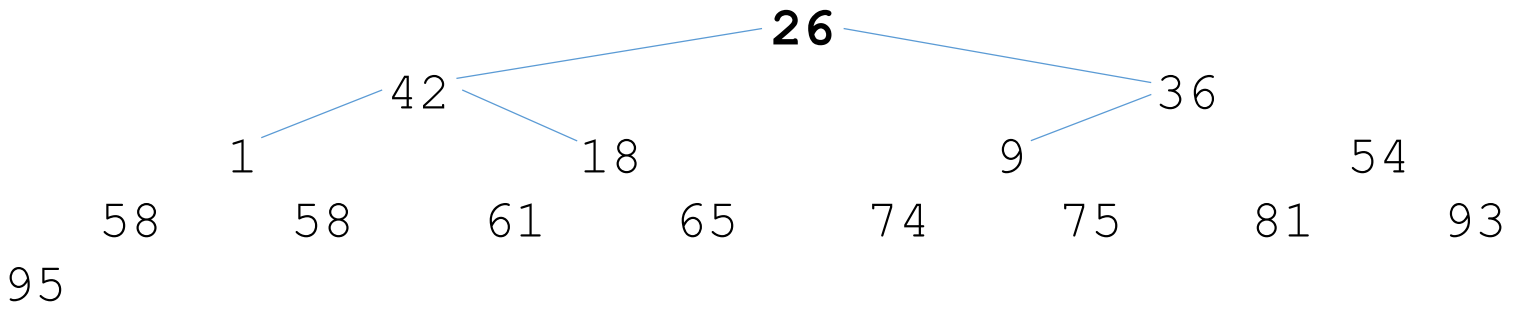
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

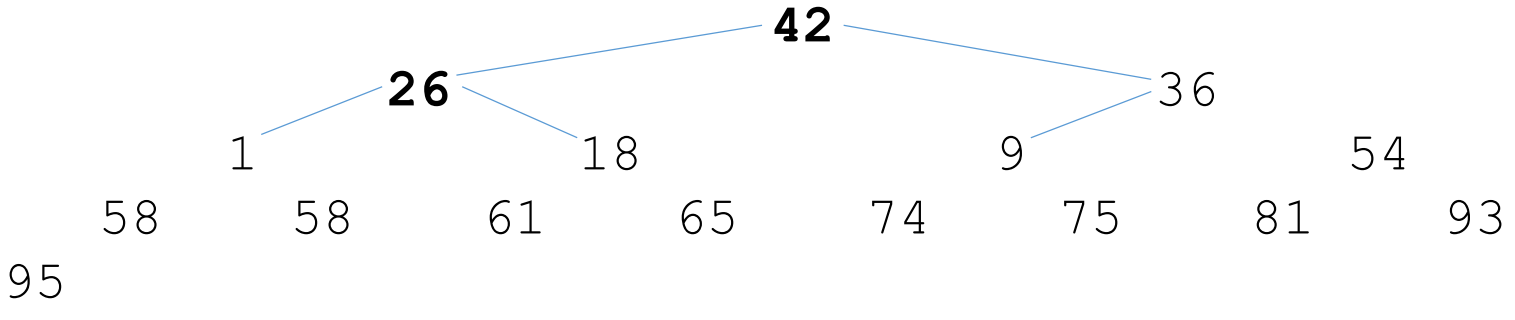
[**54**,42,36,1,18,9,**26**,58,58,61,65,74,75,81,93,95]



[26,42,36,1,18,9,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]



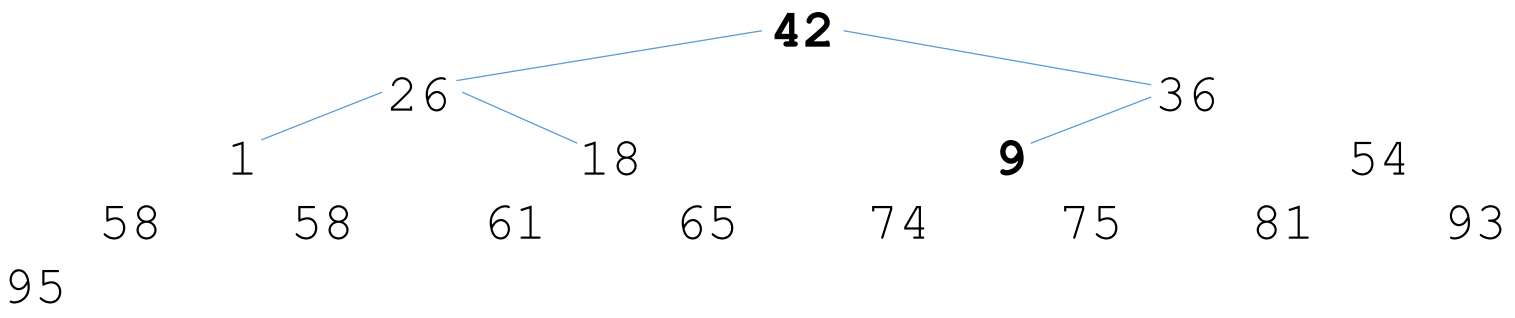
[**42**,**26**,36,1,18,9,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]



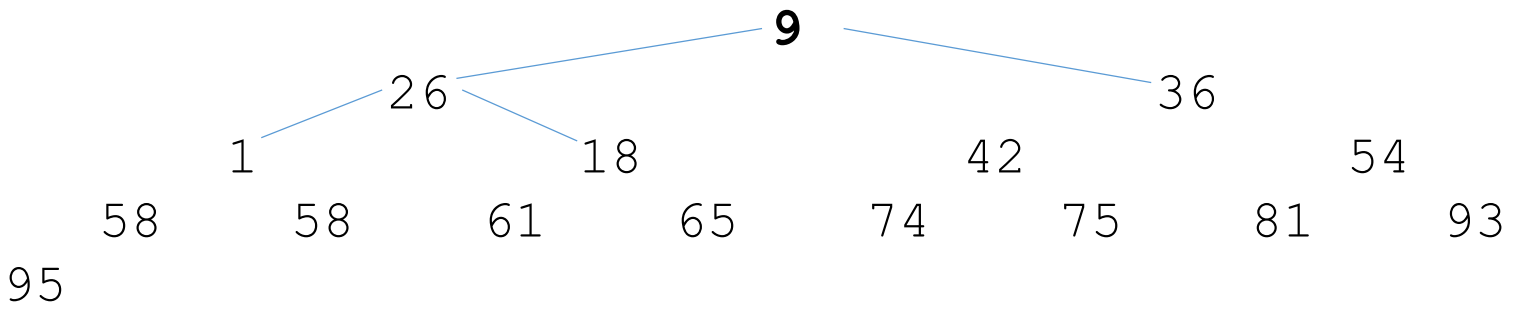
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy

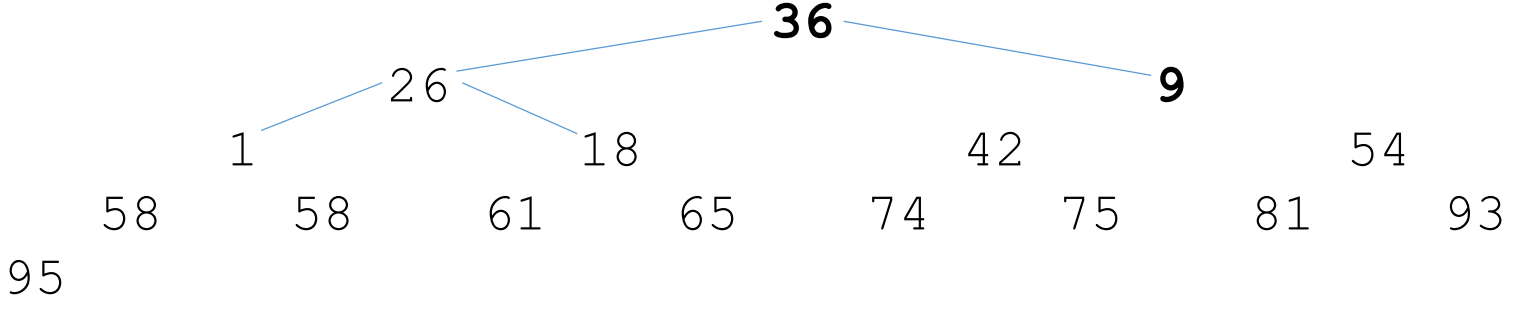
[**42**,26,36,1,18,**9**,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]



[9,26,36,1,18,42,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]

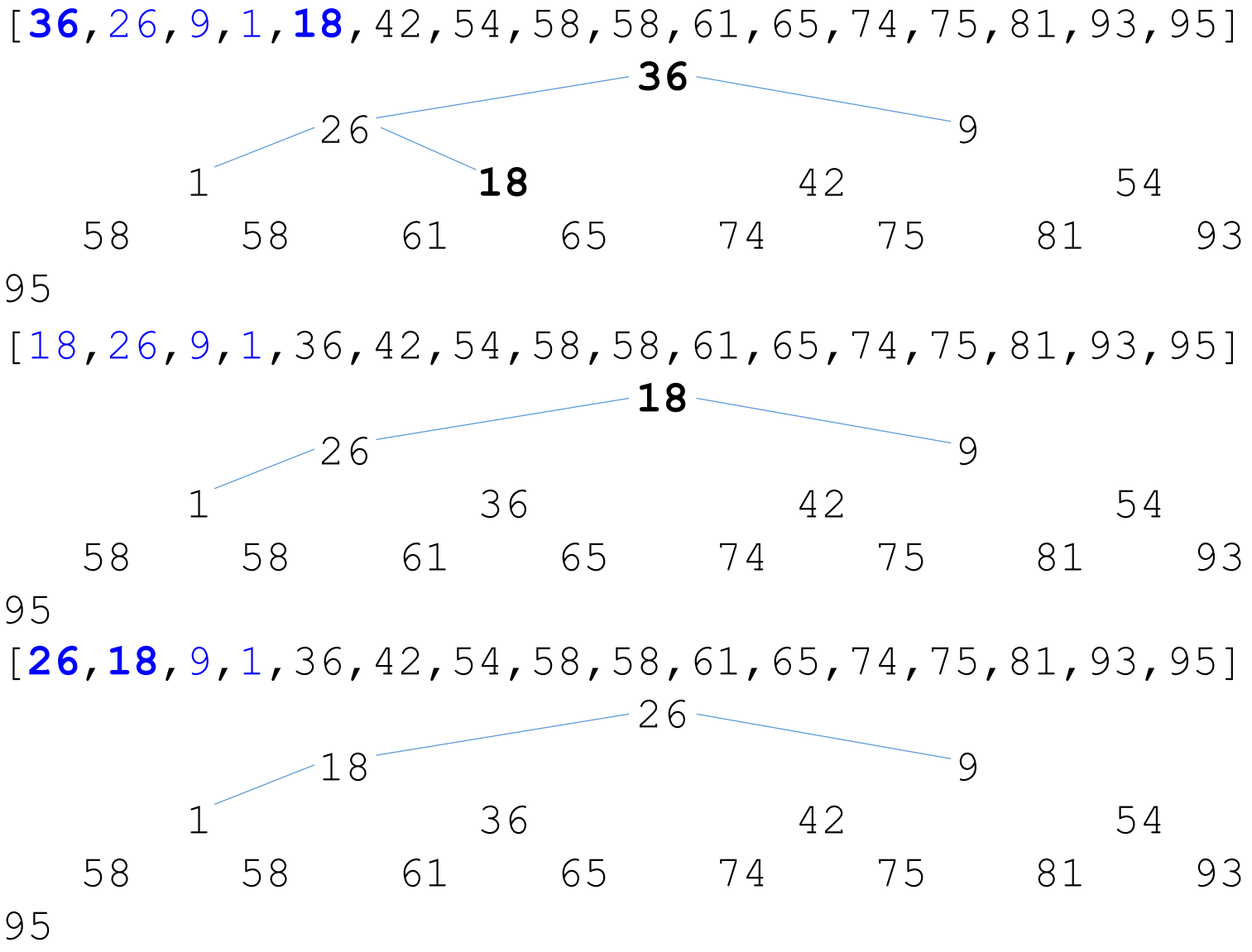


[**36**,26,**9**,1,18,42,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]



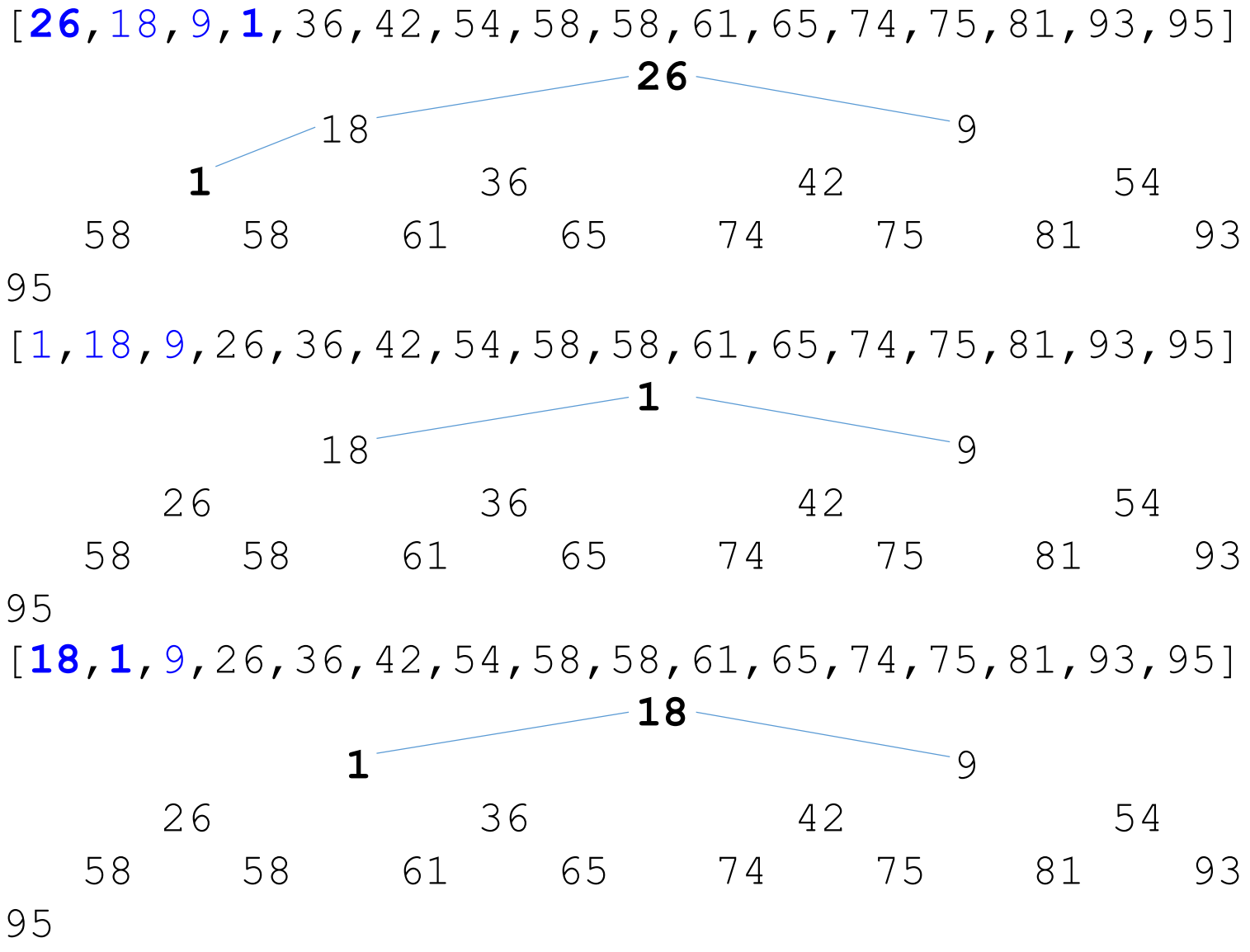
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy



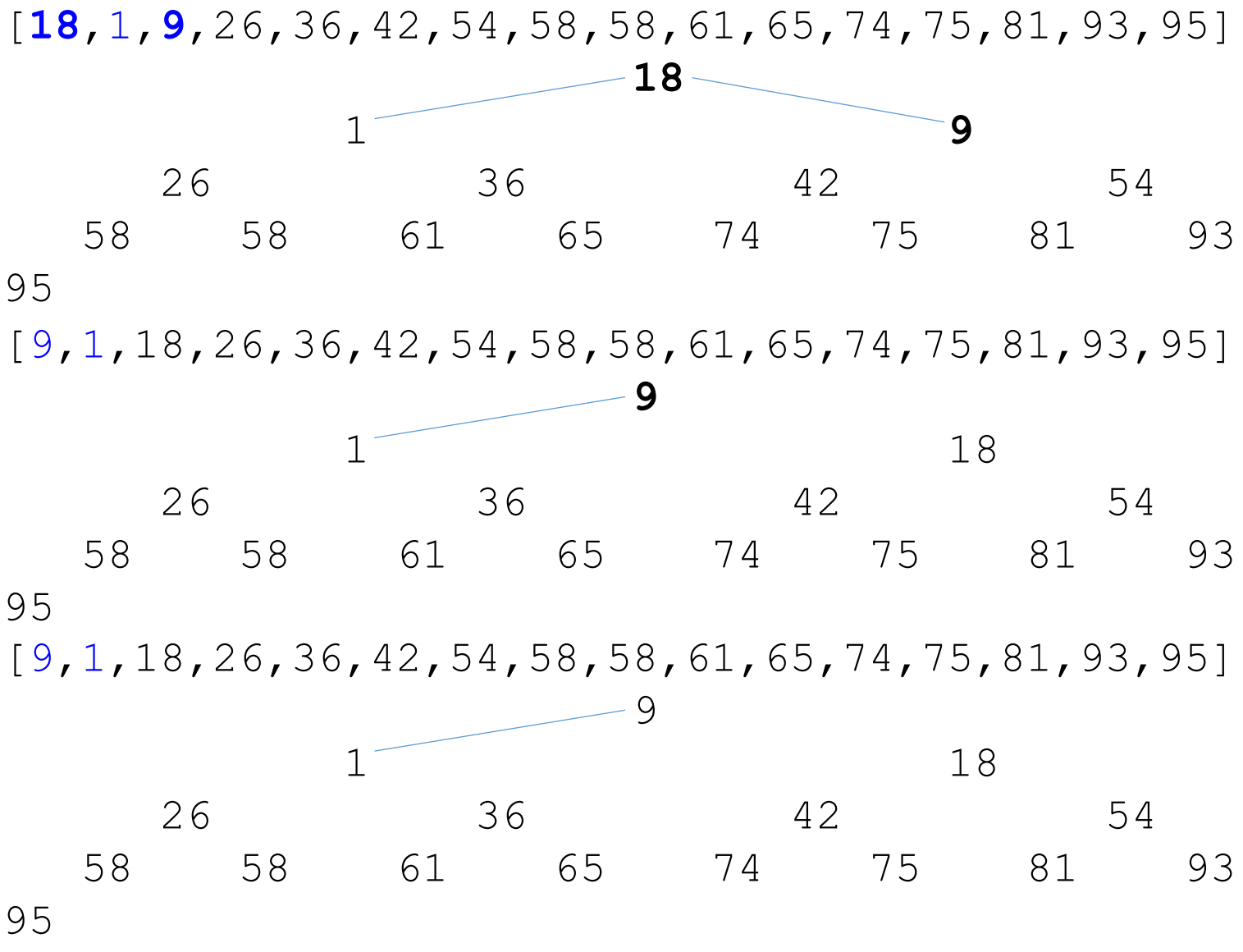
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy



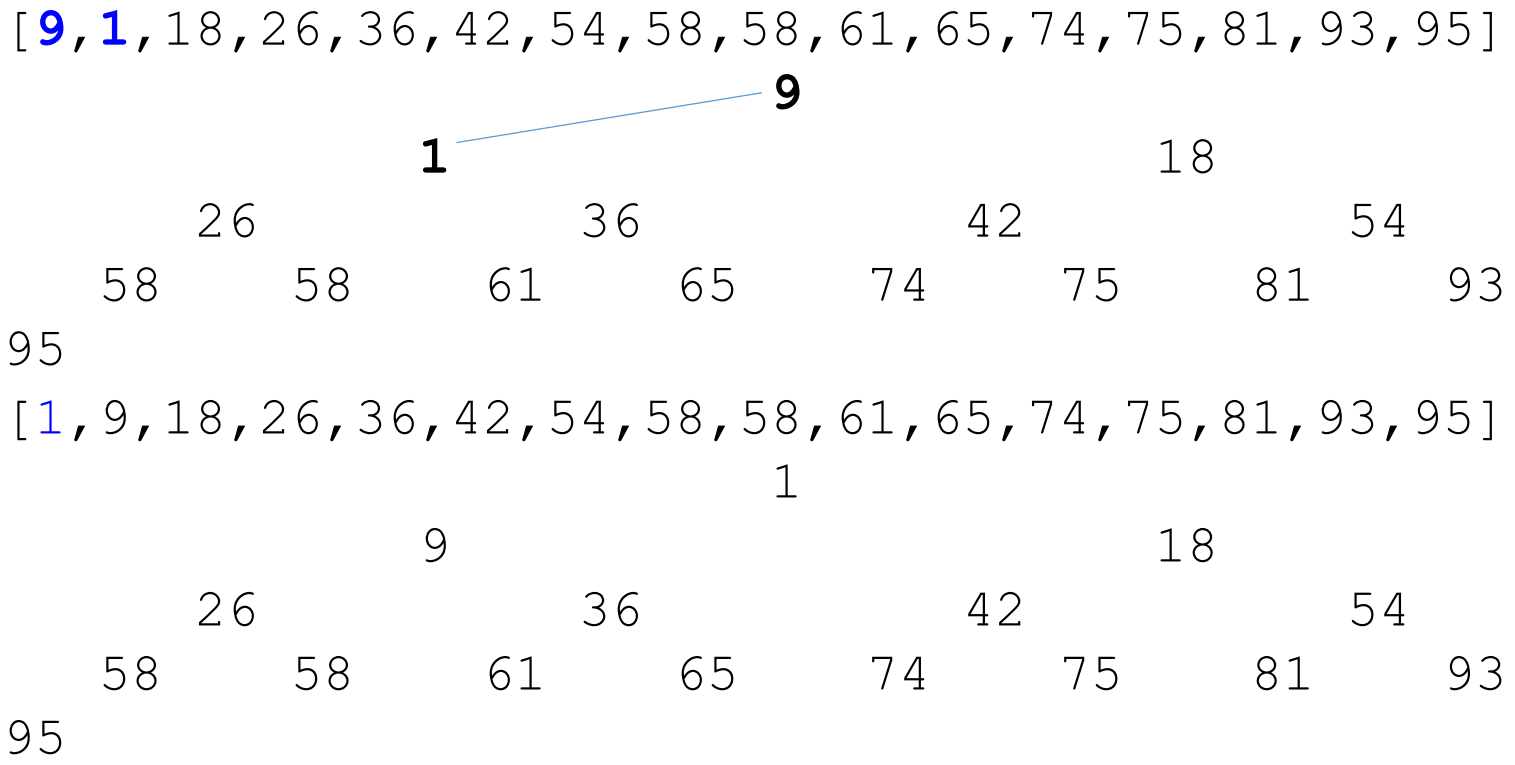
Heap Sort

- Výběr prvku a kontrola haldy



Heap Sort

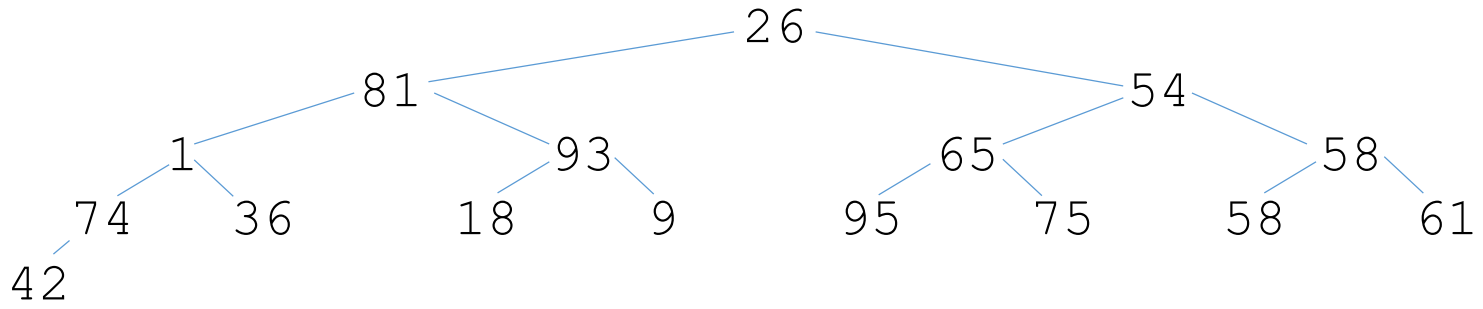
- Výběr prvku a kontrola haldy



Heap Sort

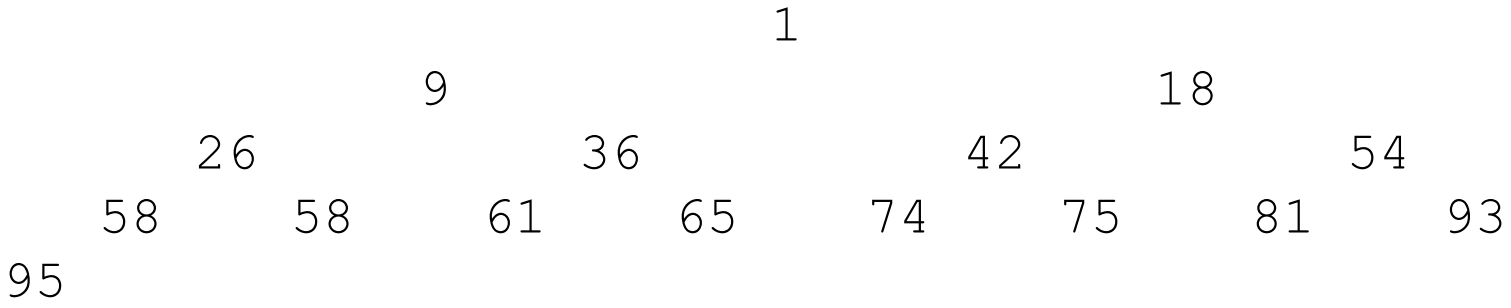
- Vstup

```
[26,81,54,1,93,65,58,74,36,18,9,95,75,58,61,42]
```



- Výstup

```
[1,9,18,26,36,42,54,58,58,61,65,74,75,81,93,95]
```



Heap Sort

```
def heapSort(array):
  for start in range((len(array)-2)//2, -1, -1):
    movedown(array, start, len(array)-1)

  for end in range(len(array)-1, 1, -1):
    array[end], array[0] = array[0], array[end]
    movedown(array, 0, end - 1)
```

tvorba haldy

výběr prvku

kontrola haldy

```
def movedown(array, start, end):
  root = start
  while True:
   child = root * 2 + 1
   if child > end: break
   if child + 1 <= end and array[child] < array[child + 1]:
     child += 1
   if array[root] < array[child]:
     array[root], array[child] = array[child], array[root]
     root = child
   else:
     break
```

Heap Sort

tvorba haldy

```
def heapSort(array):
    myHeap = heapDataType(array)
    while myHeap.size():
        max = myHeap.removeMax()
        result.add(max)
```

výběr prvku

kontrola haldy

```
def r
    roo
    while True:
        child = root * 2 + 1
        if child > end: break
        if child + 1 <= end and array[child] < array[child + 1]:
            child += 1
        if array[root] < array[child]:
            array[root], array[child] = array[child], array[root]
            root = child
        else:
            break
```

Heap Sort

- Vhodný pro kombinaci s binárním vyhledáváním
- Použití jako „záložní“ algoritmus pro quick sort
  - Garantovaná „worst-case“ náročnost
- Využívá záměn v rámci vstupní datové struktury (nepotřebuje pomocné uložení dat)
- Vhodný i pro inkrementální řazení

- Zkuste si implementovat pomocí abstraktního datového typu

Řazení

- Porovnání algoritmů
  - Časová náročnost (best, average, worst)

Porovnávací algoritmy nemohou být lepší než $n \cdot log\ n$

  - Paměťová náročnost (memory)
  - Stabilita řazení
- Vše v „big O“ notaci

Více se tomuto tématu budeme věnovat v druhé půlce semestru

Algoritmus	Best	Average	Worst	Memory	Stable
Heap sort	n log n	n log n	n log n	1	No

Základy algoritmizace

- Dnes:
  - Abstraktní datové typy
  - Zásobník
  - Fronta
  - Řazení pomocí haldy

Příště spojové seznamy

Základy algoritmizace

- Dodatečné zdroje:
  - Implementing a Stack in Python
    http://interactivepython.org/runestone/static/pythonds/BasicDS/ImplementingaStackinPython.html
  - Implementing a Queue in Python
    http://interactivepython.org/runestone/static/pythonds/BasicDS/ImplementingaQueueinPython.html