OPT test [datum testu] | Příjmení: | Jméno:

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď vždy napište do připravené mezery. Postup psát nemusíte.

1. Máme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) (1 bod) Napište bázi prostoru null $\mathbf{A}$.

   b) (1 bod) Napište bázi prostoru $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$.

2. Závislost proměnné $z \in \mathbb{R}$ na proměnných $x, y \in \mathbb{R}$ modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x,y) = a(x-y)^2 + b(x+y)^2 + cxy + d$. Odhadněte parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \dots, m$, ve smyslu nejmenších čtverců.

   a) (1 bod) Zformulujte jako optimalizační úlohu (musí být jasně vidět, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezení).

   b) (1 bod) Napište algoritmus (pseudokód) na řešení úlohy.

3. (1 bod) Najděte bod na přímce $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1 \,\}$, který je nejblíže bodu $(0,1)$.

4. Máme funkci $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

   a) (1 bod) Napište funkci ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a $\mathbf{A}$ je symetrická.

   b) (1 bod) Najděte vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

   c) (1 bod) Určete definitnost matice $\mathbf{A}$.

OPT test [datum testu] | Příjmení: Jméno:

Odpovědi na následující kvízové příklady VYZNAČTE DO TABULKY KŘÍŽKY. V každém příkladu je právě jedna odpověď správně. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Chcete-li odstranit již vyznačený křížek, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.
(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

001

	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							
d							
e							

1. Máme množinu $X = \{\, (1, -t, 2t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.
   (a) Množina X je lineární podprostor dimenze 1.
   (b) Množina X je lineární podprostor dimenze 3.
   (c) Množina X je afinní podprostor dimenze 3.
   (d) Množina X je afinní podprostor dimenze 1.
   (e) žádná z uvedených možností

2. Je-li matice $\mathbf{A}$ antisymetrická, pak matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{I}$ je
   (a) symetrická
   (b) s ortonormálními sloupci
   (c) ortogonální
   (d) antisymetrická
   (e) žádná z uvedených možností

3. Lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nemůže být isometrie, jestliže
   (a) $m = n$
   (b) $n \neq m$
   (c) $n = 1$
   (d) $n < m$
   (e) $n > m$

4. Máme matici $\mathbf{A}$ a ortogonální matici $\mathbf{B}$ (s takovými rozměry, že součin $\mathbf{AB}$ existuje). Který výrok z toho plyne?
   (a) $\operatorname{null}(\mathbf{AB}) \supseteq \operatorname{null}\mathbf{A}$
   (b) $\operatorname{rng}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rng}\mathbf{A}$
   (c) $\operatorname{null}(\mathbf{AB}) = \operatorname{null}\mathbf{B}$
   (d) $\operatorname{rng}(\mathbf{AB}) \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{B}$
   (e) žádná z uvedených možností

5. Máme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ s lineárně nezávislými sloupci a vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Spočteme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{x}$ na podprostor $\operatorname{rng}\mathbf{A}$. Souřadnice této projekce vzhledem k bázi tvořené sloupci matice $\mathbf{A}$ jsou
   (a) $\mathbf{AA}^T\mathbf{x}$
   (b) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{x}$
   (c) $\mathbf{A}^T\mathbf{x}$
   (d) $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{x}$
   (e) žádná z uvedených možností

6. Nechť $\mathbf{u} = (1, 0)$. Ortogonální projekce vektoru $(1, 2)$ na podprostor $(\operatorname{span}\{\mathbf{u}\})^\perp$ je
   (a) vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 2)$
   (b) vektor $(0, -2)$
   (c) vektor $(0, 1)$
   (d) matice $\mathbf{I} - \mathbf{uu}^T$
   (e) žádná z uvedených možností

7. Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor $\operatorname{span}\{\mathbf{a}\}$ je
   (a) symetrická matice s jediným vlastním číslem 1
   (b) singulární matice
   (c) symetrická regulární matice
   (d) matice plné hodnosti
   (e) žádná z uvedených možností