

Příklady na této stránce vyřešte. Odpověď vždy napište do připravené mezery. Postup psát nemusíte.

1. Máme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) (1 bod) Napište bázi prostoru null \mathbf{A} .

b) (1 bod) Napište bázi prostoru $\text{rng}(\mathbf{A}^T)$.

2. Závislost proměnné $z \in \mathbb{R}$ na proměnných $x, y \in \mathbb{R}$ modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x, y) = a(x - y)^2 + b(x + y)^2 + cxy + d$. Odhadněte parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, m$, ve smyslu nejmenších čtverců.

a) (1 bod) Zformulujte jako optimalizační úlohu (musí být jasně vidět, co jsou proměnné, co účelová funkce a co omezení).

b) (1 bod) Napište algoritmus (pseudokód) na řešení úlohy.

3. (1 bod) Najděte bod na přímce $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$, který je nejbližší bodu $(0, 1)$.

4. Máme funkci $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

a) (1 bod) Napište funkci ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ a \mathbf{A} je symetrická.

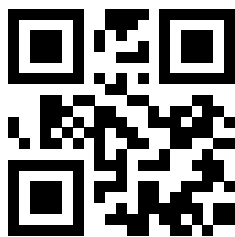
b) (1 bod) Najděte vlastní čísla matice \mathbf{A} .

c) (1 bod) Určete definitnost matice \mathbf{A} .

Odovědi na následující kvízové příklady **VYZNAČTE DO TABULKY KŘÍŽKY**. V každém příkladu je právě jedna odpověď správně. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce nechte prázdný. Chcete-li odstranit již vyznačený křížek, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus čtvrt bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

001



	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							
d							
e							

- Máme množinu $X = \{ (1, -t, 2t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
 - Množina X je lineární podprostor dimenze 1.
 - Množina X je lineární podprostor dimenze 3.
 - Množina X je afinní podprostor dimenze 3.
 - Množina X je afinní podprostor dimenze 1.
 - žádná z uvedených možností
- Je-li matice \mathbf{A} antisymetrická, pak matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}$ je
 - symetrická
 - s ortonormálními sloupci
 - ortogonální
 - antisymetrická
 - žádná z uvedených možností
- Lineární zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nemůže být isometrie, jestliže
 - $m = n$
 - $n \neq m$
 - $n = 1$
 - $n < m$
 - $n > m$
- Máme matici \mathbf{A} a ortogonální matici \mathbf{B} (s takovými rozměry, že součin \mathbf{AB} existuje). Který výrok z toho plyne?
 - $\text{null}(\mathbf{AB}) \supseteq \text{null } \mathbf{A}$
 - $\text{rng}(\mathbf{AB}) = \text{rng } \mathbf{A}$
 - $\text{null}(\mathbf{AB}) = \text{null } \mathbf{B}$
 - $\text{rng}(\mathbf{AB}) \subseteq \text{rng } \mathbf{B}$
 - žádná z uvedených možností
- Máme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s lineárně nezávislými sloupci a vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Spočteme ortogonální projekci vektoru \mathbf{x} na podprostor $\text{rng } \mathbf{A}$. Souřadnice této projekce vzhledem k bázi tvořené sloupci matice \mathbf{A} jsou
 - $\mathbf{AA}^T \mathbf{x}$
 - $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x}$
 - $\mathbf{A}^T \mathbf{x}$
 - $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x}$
 - žádná z uvedených možností
- Nechť $\mathbf{u} = (1, 0)$. Ortogonální projekce vektoru $(1, 2)$ na podprostor $(\text{span}\{\mathbf{u}\})^\perp$ je
 - vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 2)$
 - vektor $(0, -2)$
 - vektor $(0, 1)$
 - matice $\mathbf{I} - \mathbf{uu}^T$
 - žádná z uvedených možností
- Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor $\text{span}\{\mathbf{a}\}$ je
 - symetrická matice s jediným vlastním číslem 1
 - singulární matice
 - symetrická regulární matice
 - matice plné hodnosti
 - žádná z uvedených možností