Optimalizace

11. Dualita v lineárním programování

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Věty o dualitě

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zřejmě platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$.

Věta (o komplementaritě)

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou přípustná. Pak $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ právě když

$$\begin{array}{rcll} \sum_j a_{ij}x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_i a_{ij}y_j = c_j & \forall j \end{array}$$

Důkaz: Podmínky komplementarity jdou napsat jako $\mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$.
Věta pak plyne z $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$.

Věta (o silné dualitě)

Primární úloha má optimální řešení, právě když duální úloha má optimální řešení.

Pokud $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou optimální řešení, pak $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Důkaz neuvádíme.

Příklad na slabou dualitu

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\min & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = 9 \\
5 = & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq 3 \\
4 = & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq 1 \\
5 = & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq 3 \\
-1 = & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq -1 \\
2 = & x_1 & & & & & \geq 0 \\
1 = & & & x_2 & & & \geq 0 \\
0 = & & & & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max & 3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = 4.5 \\
0.5 = & y_1 & & & & & & & \geq 0 \\
0 = & & & y_2 & & & & & \geq 0 \\
1 = & & & & & y_3 & & & \geq 0 \\
0 = & & & & & & & y_4 & \geq 0 \\
2 = & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & \leq 2 \\
3.5 = & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & \leq 5 \\
3 = & 2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

Příklad na silnou dualitu + komplementaritu

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\min & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = 5.4 \\
3 = & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq 3 \\
2.4 = & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq 1 \\
3 = & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq 3 \\
-0.6 = & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq -1 \\
1.2 = & x_1 & & & & & \geq 0 \\
0.6 = & & & x_2 & & & \geq 0 \\
0 = & & & & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max & 3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & = 5.4 \\
0.2 = & y_1 & & & & & & & \geq 0 \\
0 = & & & y_2 & & & & & \geq 0 \\
1.6 = & & & & & y_3 & & & \geq 0 \\
0 = & & & & & & & y_4 & \geq 0 \\
2 = & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & \leq 2 \\
5 = & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & \leq 5 \\
3 = & 2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

Dovolené možnosti řešitelnosti primární a duální úlohy

primár/duál	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	✓	×	×
neomezená	×	×	✓
nepřípustná	×	✓	✓

- Tvrzení v prvním sloupci a prvním řádku plynou ze silné duality
- Zbylá tvrzení plynou ze slabé duality

Věta o stínových cenách

Definujme funkci

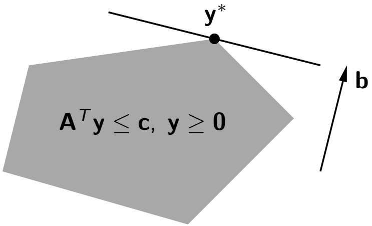
$$f(\mathbf{b}) = \min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\} = \max\{\, \mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \,\}$$

Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké $\mathbf{b}$ právě jedno optimální řešení $\mathbf{y}^*$.

Pak je funkce f na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ diferencovatelná a platí $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Důkaz: Duál nabývá optima v jediném extremálním bodě $\mathbf{y}^*$ přípustného mnohostěnu duálu:



Změníme-li nepatrně $\mathbf{b}$, optimální duální řešení se nezmění a zůstane jediné.
Tedy na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ je $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ a tedy $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Příklad

$$\begin{array}{rrrrrrr} \min & 2x_1 & + 5x_2 & + 6x_3 & = 5.402 \\ & 2x_1 & + x_2 & + 2x_3 & \geq 3.01 \\ & x_1 & + 2x_2 & + 2x_3 & \geq 1 \\ & x_1 & + 3x_2 & + x_3 & \geq 3 \\ & -x_1 & + x_2 & - 2x_3 & \geq -1 \\ & x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & & \geq 0 \\ & & & x_3 & \geq 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr} \max & 3.01y_1 & + y_2 & + 3y_3 & - y_4 & = 5.402 \\ 0.2 = & y_1 & & & & \geq 0 \\ 0 = & & y_2 & & & \geq 0 \\ 1.6 = & & & y_3 & & \geq 0 \\ 0 = & & & & y_4 & \geq 0 \\ & 2y_1 & + y_2 & + y_3 & - y_4 & \leq 2 \\ & y_1 & + 2y_2 & + 3y_3 & + y_4 & \leq 5 \\ & 2y_1 & + 2y_2 & + y_3 & - 2y_4 & \leq 6 \end{array}$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3.01,\ 1,\ 3,\ -1)^T\ (0.2,\ 0,\ 1.6,\ 0) = 5.402$$

Duální úloha pro LP v rovnicovém tvaru

Tvrzení: Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

Důkaz: Přepišme úlohy jako

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ \text{za podm.} \quad & -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T(\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_+ \geq \mathbf{0} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T(\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T & -\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_+, \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

O této dvojici víme, že je navzájem duální.

Duální úloha pro LP v obecném tvaru

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{j\in J} c_j x_j & \max & \sum_{i\in I} y_i b_i & \\
\text{za podm.} & \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i & \text{za podm.} & y_i \in \mathbb{R} & \forall i \in I_0 \\
& \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \geq b_i & & y_i \geq 0 & \forall i \in I_+ \\
& \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \leq b_i & & y_i \leq 0 & \forall i \in I_- \\
& x_j \in \mathbb{R} & & \sum_{i\in I} y_i a_{ij} = c_j & \forall j \in J_0 \\
& x_j \geq 0 & & \sum_{i\in I} y_i a_{ij} \leq c_j & \forall j \in J_+ \\
& x_j \leq 0 & & \sum_{i\in I} y_i a_{ij} \geq c_j & \forall j \in J_-
\end{array}
$$

kde

$$
I = \{1,\dots,m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-
$$
$$
J = \{1,\dots,n\} = J_0 \cup J_+ \cup J_-
$$

Příklad:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{min} & 2x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & & \\
\text{za podm.} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\
& -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & \le & 5 \\
& x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & \ge & 0 \\
& & & & & & & x_1 & \ge & 0 \\
& & & & & & & x_2 & \in & \mathbb{R} \\
& & & & & & & x_3 & \ge & 0 \\
& & & & & & & x_4 & \le & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{max} & 6y_1 & + & 5y_2 & & & & \\
\text{za podm.} & & & & & y_1 & \in & \mathbb{R} \\
& & & & & y_2 & \le & 0 \\
& & & & & y_3 & \ge & 0 \\
& 2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \le & 2 \\
& -y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & = & 0 \\
& y_1 & - & 3y_2 & - & y_3 & \le & -3 \\
& 2y_1 & & & - & 3y_3 & \ge & 1
\end{array}
$$

Duální řešení jako certifikát optimality

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou optimální pro úlohy

$$
\begin{array}{rr}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{za podm.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
\max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\
& \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}
\end{array}
$$

právě tehdy, když splňují soustavu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\
\mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\
\mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Tedy přípustné duální řešení $\mathbf{y}$ splňující $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ je důkaz (**certifikát**) toho, že přípustné primární řešení $\mathbf{x}$ je optimální.

Příklady na LP dualitu

Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$
\begin{array}{rl}
\min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\
& x_i \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rll}
\max & y & \\
\text{za podm.} & y \in \mathbb{R} & \\
& y \leq c_i & \forall i
\end{array}
$$

neboli

$$
\begin{array}{rl}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{za podm.} & \mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1 \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\max & y \\
\text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\
& y\mathbf{1} \leq \mathbf{c}
\end{array}
$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně rovna $\min\{c_1, \ldots, c_n\}$
- slabá dualita: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \ldots, c_n\} \geq y$
- komplementarita: optimální $\mathbf{x}, y$ splňují

$$(x_i = 0) \vee (y = c_i) \quad \forall i$$

Ekonomická interpretace duality

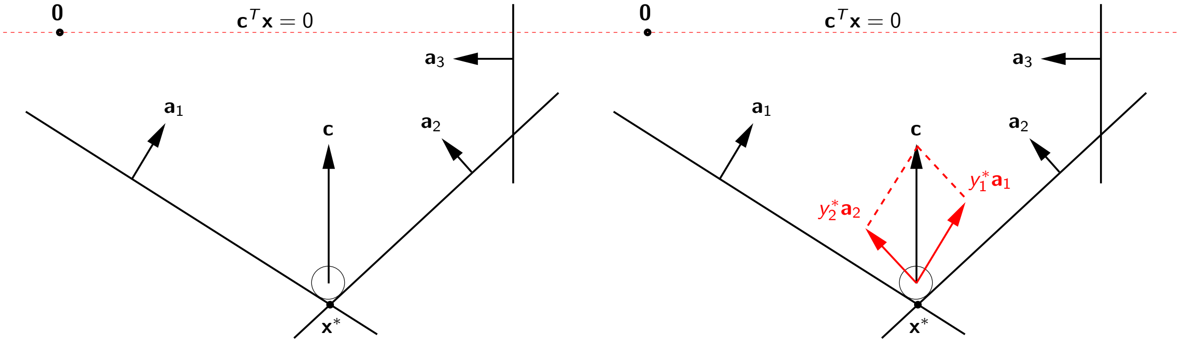
Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje:

$$
\begin{array}{rrcr}
\max & 120l + 76h & & \\
\text{za podm.} & 2l + 1.5h & \leq & 100 \\
& 0.4l + 0.2h & \leq & 16 \\
& l & \geq & 0 \\
& h & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcr}
\min & 100a + 16b & & \\
\text{za podm.} & a & \geq & 0 \\
& b & \geq & 0 \\
& 2a + 0.4b & \geq & 120 \\
& 1.5a + 0.2b & \geq & 76
\end{array}
$$

Význam duální úlohy:

- a, b jsou jednotkové ceny surovin (brambor a oleje)
- Překupník: Jaké nejnižší ceny mohu nabídnout, aby mi výrobce prodal své zásoby surovin?
- Optimální duální řešení je $a = 32$ a $b = 140$ (stínové ceny surovin).

Míček v mnohostěnu



$$\min\{\,\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,\} \;=\; \max\{\,\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\,\}$$

- Míček v poloze $\mathbf{x}$ je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ je minimální pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $\mathbf{c} = \sum_i y_i^*\mathbf{a}_i = \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$
- Když $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$ (míček se stěny i nedotýká), síla stěny na míček je $y_i^* = 0$.
  Proto $y_i^*(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* - b_i) = 0$ (komplementarita).

Dopravní úloha

$$
\begin{array}{rll}
\min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{za podm.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \\
& x_{ij} \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rll}
\max & \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j & \\
\text{za podm.} & u_i \in \mathbb{R} & i = 1, \dots, m \\
& v_j \in \mathbb{R} & j = 1, \dots, n \\
& u_i + v_j \leq c_{ij} & i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n
\end{array}
$$