Optimalizace

10. Konvexní množiny a mnohostěny

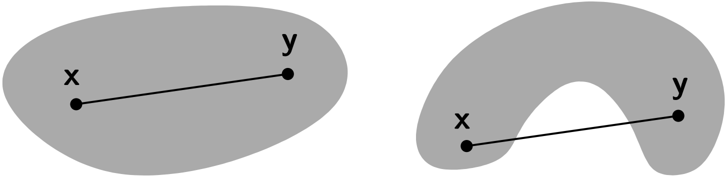
Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Konvexní množiny

Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže

$$\mathbf{x} \in X, \;\; \mathbf{y} \in X, \;\; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X.$$



- **Konvexní kombinace** bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je bod $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, kde

  $$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0.$$

  Tvrzení: Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, právě když je uzavřená na konvexní kombinace.

- **Konvexní obal** bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ je množina všech jejich konvexních kombinací:

  $$\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} = \{\, \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1,\; \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0 \,\}.$$

  Obecněji: **konvexní obal množiny** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konvexních množin, které množinu X obsahují. Značíme $\operatorname{conv} X$.

Příbuzné kombinace, obaly a množiny

Lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ se nazývá jejich

afinní kombinace,	jestliže	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.	
nezáporná kombinace,	jestliže		$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$.
konvexní kombinace,	jestliže	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$,	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$.

Množina, která je uzavřená na

lineární kombinace,	se nazývá	**lineární podprostor**.
afinní kombinace,	se nazývá	**afinní podprostor**.
nezáporné kombinace,	se nazývá	**konvexní kužel**.
konvexné kombinace,	se nazývá	**konvexní množina**.

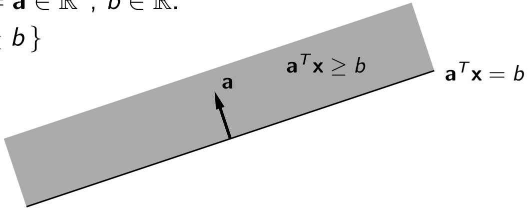
Některé operace zachovávající konvexitu množin

- **Průnik.** Průnik konvexních množin je konvexní množina.
- **Afinní zobrazení.** Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je afinní zobrazení, tj.
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$
Jestliže $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, pak
$$\mathbf{f}(X) = \{\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X \,\}$$
je také konvexní množina.

Důkazy obou tvrzení jsou snadné.

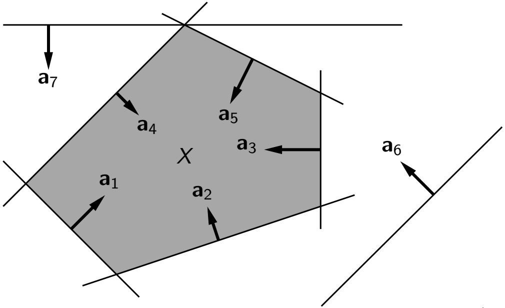
Konvexní mnohostěny

- **Nadrovina** je množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$, kde $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.
- (Uzavřený) **poloprostor** je množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b \,\}$

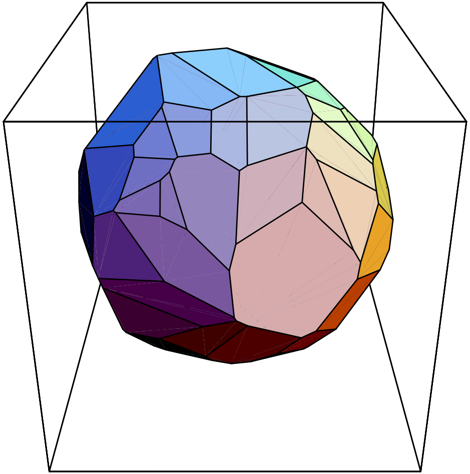


- **Konvexní mnohostěn** je průnik konečně mnoha poloprostorů:
  $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i \;\; \forall i = 1, \dots, m \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$

  Dimenze mnohostěnu: $\dim X = \dim \operatorname{aff} X$



Náhodný omezený konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$: (From Wolfram Mathworld)



Příklady jednoduchých konvexních mnohostěnů v $\mathbb{R}^n$:

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$
- **afinní podprostor** (bod, přímka, rovina, nadrovina, ...)
- **polopřímka** $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{v} \mid \alpha \geq 0 \,\}$
- **poloprostor** $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b \,\}$
- **hyperkrychle** $[a, b]^n = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_i \leq b \; \forall i \,\}$
- **hyperkvádr (box)** $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \; \forall i \,\}$
- **simplex:** konvexní obal afinně nezávislé množiny bodů
  - **standardní (= pravděpodobnostní) simplex** $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \,\}$
- **křížový polytop (cross-polytope)** $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \,\}$
- **polyhedrální konvexní kužel:** je zároveň konvexní kužel a konvexní mnohostěn
  - **nezáporný kužel** $\mathbb{R}_+^n$ (kde $\mathbb{R}_+$ je množina nezáporných reálných čísel)
- **panel (slab)** $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid b_1 \leq \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b_2 \,\}$

Příklady konvexních množin, které nejsou mnohostěny:

- **koule** $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \,\}$ pro $n \geq 2$ (průnik nekonečně mnoha poloprostorů)
- **otevřený poloprostor** $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} > b \,\}$

Extremální body

Definice: Bod $\mathbf{x} \in X$ je **extremální bod** konvexní množiny X, jestliže

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \;\; \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

Charakterizace extremálních bodů mnohostěnu

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, m \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$

- $I(\mathbf{x}) = \{\, i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \,\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ označuje množinu indexů nerovností aktivních v bodě $\mathbf{x}$.
- Pro $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ označme jako $\mathbf{A}_I$ řádky matice $\mathbf{A}$ s indexy I. Podobně pro $\mathbf{b}_I$.

Věta

Bod $\mathbf{x} \in X$ je extremální bod mnohostěnu X,
právě když matice $\mathbf{A}_{I(\mathbf{x})}$ má lin. nezávislé sloupce (tj. soustava $\mathbf{A}_{I(\mathbf{x})}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{I(\mathbf{x})}$ má jediné řešení).

Nalezení všech extremálních bodů mnohostěnu

Z Věty plyne **algoritmus:** Pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ otestuj:

- Má soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ právě jedno řešení?
- Splňuje toto řešení $\mathbf{x}$ soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$?

Pokud oboje platí, pak $\mathbf{x}$ je extremální bod. Příslušná množina I se pak nazývá **báze** bodu $\mathbf{x}$.

Příklad: $X = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 1 \}$, tedy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Zkoumejme neprázdné podmnožiny $I \subseteq \{1, 2, 3\}$:

- $I = \{1\}$ a $I = \{2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má nekonečně mnoho řešení.
- $I = \{1, 2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 0)$, které nesplňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 1)$, které splňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{2, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (1, 0)$, které splňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 2, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ nemá řešení.

Závěr: Mnohostěn má dva extremální body $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

Minimum lineární funkce na mnohostěnu

Věta

Neprázdný konvexní mnohostěn má (aspoň jeden) extremální bod, právě když neobsahuje přímku.

Příklad mnohostěnu obsahujícího přímku: panel $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid b \leq \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c \,\}$

Věta

Nechť konvexní mnohostěn X neobsahuje přímku. Nechť lineární funkce f nabývá na X minima. Potom existuje extremální bod X, v němž f nabývá na X minima.

Minimum lze najít hrubou silou: Projdi všechny extremální body a vyber ten s nejmenší hodnotou f.
Potíž: Extremálních bodů může být příliš mnoho.

Simplexový algorithmus na řešení LP (Dantzig, 1947):

- Uvažuje LP ve tvaru $\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$
- Začne z nějakého extremálního bodu mnohostěnu.
- V každé iteraci přejde (po hraně) k jinému extremálnímu bodu s lepší (nebo stejnou) hodnotou f. To lze vidět jako přecházení od báze k bázi.