Optimalizace

4. Kvadratické formy a funkce

Tomáš Werner, Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Polynomy více proměnných

- **Monom** proměnných $x_1, \dots, x_n$ je součin $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ kde exponenty k_i jsou celé nezáporné.
  Stupeň monomu je číslo $k_1 + \cdots + k_n$.
- **Polynom** n proměnných je lineární kombinace monomů.
  Stupeň polynomu je stupeň jeho monomu s nejvyšším stupněm.
- Polynom je **homogenní**, jestliže má stupně všech monomů shodné.

Příklady:

- $f(x, y, z) = xy^2 - 5x^3 + 2xyz$ je homogenní polynom tří proměnných stupně 3
- $f(x, y) = x^3y^2 - y^2 + 2xy - 7$ je nehomogenní polynom dvou proměnných stupně 5

Ekvivalentní názvy v lineární algebře (pro funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$):

- homogenní polynom stupně 1 = lineární forma = lineární funkce
- nehomogenní polynom stupně 1 = afinní funkce
- homogenní polynom stupně 2 = kvadratická forma
- nehomogenní polynom stupně 2 = kvadratická funkce

Kvadratické formy

Kvadratická forma

Kvadratická forma (tj. homogenní polynom druhého stupně) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Příklad: $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Tvrzení

Pro každou kvadratickou formu f existuje symetrická matice $\mathbf{A}$ tak, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$.
Matice $\mathbf{A}$ je formou f určena jednoznačně.

Důkaz: S každým členem $a_{ij} x_i x_j$ je v sumě také člen $a_{ji} x_j x_i$. Jejich součet $(a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$ závisí jen na $a_{ij} + a_{ji}$.

Jiný důkaz: Každá čtvercová matice $\mathbf{A}$ se dá psát jako $\mathbf{A} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{symetrická}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{antisymetrická}}$.

Ale $\mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}}_{(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}} = 0$ (protože $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ je skalár).

Definitnost kvadratické formy / její matice

Kvadratická forma f je

- **positivně semidefinitní**, když $f(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x}$
- **negativně semidefinitní**, když $f(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x}$
- **positivně definitní**, když $f(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **negativně definitní**, když $f(\mathbf{x}) < 0$ pro každé $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **indefinitní**, když $f(\mathbf{x}) > 0$ a $f(\mathbf{y}) < 0$ pro nějaká $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

Definitností čtvercové matice $\mathbf{A}$ rozumíme definitnost kvadr. formy $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Všimněte si:

- Matice může mít i více těchto vlastností najednou.
- $\mathbf{A}$ je negativně [semi]definitní, právě když $-\mathbf{A}$ je positivně [semi]definitní.
- Matice je indefinitní, právě když není ani positivně ani negativně semidefinitní.

Částečné uspořádání indukované positivní semidefinitností

Na množině $\mathbb{R}^{n \times n}$ zavedeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$\mathbf{A} \preceq \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B} - \mathbf{A} \text{ je positivně semidefinitní}$$

Tvrzení

Relace $\preceq$ je částečné uspořádání (tedy reflexivní, transitivní a antisymetrická).

- Speciálně: $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$ značí, že $\mathbf{A}$ je positivně semidefinitní.
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou neporovnatelné, právě když $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ je indefinitní.

Pro $n = 1$ dostaneme obyčejné uspořádání $\leq$ na množině reálných čísel.

Extrémy kvadratické formy

Tvrzení

Nechť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ je kvadratická forma.

- Je-li f positivně semidefinitní, pak má v bodě $\mathbf{0}$ minimum (tj. je zdola omezená nulou).
- Je-li f negativně semidefinitní, pak má v bodě $\mathbf{0}$ maximum (tj. je shora omezená nulou).
- Je-li f positivně definitní, pak má v bodě $\mathbf{0}$ ostré minimum.
- Je-li f negativně definitní, pak má v bodě $\mathbf{0}$ ostré maximum.
- Je-li f indefinitní, pak nemá minimum ani maximum (tj. je neomezená shora i zdola).

Pozor: Je-li f např. positivně semidefinitní, pak může mít minimum i v jiných bodech než $\mathbf{0}$.

Definitnost z hlavních minorů

Definitnost matice z hlavních minorů

Tvrzení

Determinant symetrické positivně [semi]definitní matice je kladný [nezáporný].

Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a neprázdnou množinu $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ označme $\mathbf{A}_I = [a_{ij}]_{i,j \in I}$
(tj. $\mathbf{A}_I$ získáme z $\mathbf{A}$ vyškrtnutím řádků a sloupců s indexy $i \notin I$).

Tvrzení

Je-li $\mathbf{A}$ positivně semidefinitní, pak $\mathbf{A}_I$ je také positivně semidefinitní.

Podobně pro positivní definitnost a negativní (semi)definitnost (ale **ne** pro indefinitnost).

Důkaz: V podmínce $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ zvolte $\mathbf{x}$ takové, že $x_i = 0$ pro $i \notin I$. Pak $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}_I^T\mathbf{A}_I\mathbf{x}_I$ kde $\mathbf{x}_I = (x_i)_{i \in I}$.

Determinant matice $\mathbf{A}_I$ pro nějakou $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ se nazývá **hlavní minor** matice $\mathbf{A}$.

Důsledek: Všechny hlavní minory positivně [semi]definitní matice jsou kladné [nezáporné].

Charakterizace positivně (semi)definitních matic

Vůdčí hlavní minor je hlavní minor pro $I = \{1, \dots, k\}$ a nějaké $k \leq n$.

Věta

Symetrická matice je

- positivně semidefinitní, právě když všechny její hlavní minory jsou nezáporné.
- positivně definitní, právě když všechny její vůdčí hlavní minory jsou kladné

Důkaz neuvádíme.

První podmínka nepraktická, protože hlavních minorů je $2^n - 1$.

Druhá podmínka je známa jako **Sylvestrovo pravidlo**.

Diagonalizace matice kvadratické formy

Kongruentní matice

Změna kvadratické formy transformací $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ (kde $\mathbf{C}$ je regulární):

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}}_{\mathbf{B}}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = g(\mathbf{y})$$

Matice $\mathbf{B}$ má stejnou definitnost jako matice $\mathbf{A}$ (protože zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ je bijekce).

Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ se nazývají **kongruentní**, jestliže $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$ pro nějakou regulární $\mathbf{C}$.

Tvrzení

Kongruentní matice mají stejnou definitnost.

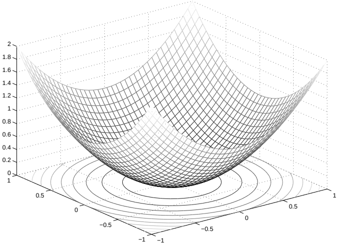
Definitnost diagonální matice

Je-li $\mathbf{B}$ diagonální, pak

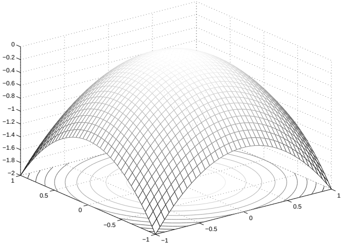
$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \cdots y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{nn}y_n^2$$

Definitnost diagonální matice okamžitě vidíme ze znamének jejích diagonálních prvků!

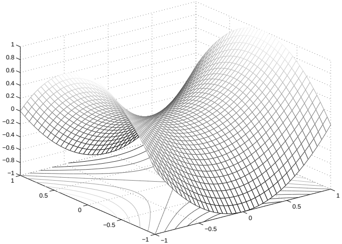
Příklad pro $n = 2$:



$g(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$
(positivně definitní)



$g(y_1, y_2) = -y_1^2 - y_2^2$
(negativně definitní)



$g(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$
(indefinitní)

Diagonalizace matice kvadratické formy

Tvrzení

Každá symetrická matice je kongruentní nějaké diagonální matici.

Tedy pro každou symetrickou $\mathbf{A}$ existuje regulární $\mathbf{C}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$ je diagonální.

Ukážeme na to dvě metody:

- **symetrická Gaussova eliminace** (rychlá)
- **spektrální rozklad** (pomalý, ale $\mathbf{C}$ je ortogonální)

Symetrická Gaussova eliminace

Elementární řádkové úpravy

V Gaussově a Gaussově-Jordanově eliminaci děláme tyto úpravy matice:

1. prohoď dva řádky
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_3^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix}$$

2. vynásob řádek nenulovým skalárem
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \alpha\mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix}$$

3. přičti násobek jednoho řádku k jinému řádku
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \alpha\mathbf{a}_1^T + \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix}$$

Každá úprava je násobení zleva nějakou regulární maticí (tzv. **elementární maticí**).

Uděláme-li stejnou elementární úpravu na řádcích i sloupcích symetrické matice $\mathbf{A}$, dostaneme matici $\mathbf{E}^T\mathbf{A}\mathbf{E}$, která je symetrická a kongruentní matici $\mathbf{A}$.

Tak postupně můžeme vynulovat nediagonální prvky matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \underbrace{\mathbf{E}_k^T \dots \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1^T}_{\mathbf{C}^T} \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k}_{\mathbf{C}}$$

Matice $\mathbf{B}$ je diagonální a kongruentní matici $\mathbf{A}$.

Základní algoritmus:

Postupně pro $i = 1, \dots, n-1$ vynuluj prvky pod prvkem a_{ii} (**pivot**) a vpravo od něj.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řád.}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{slo.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řád.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{slo.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} \end{bmatrix}$$

Co když je pivot nulový?

Základní algoritmus je použitelný jen když jsou všechny pivoty nenulové.

To je zaručeno pro positivně či negativně definitní matice.

- Když potkáme nulový pivot (tj. $a_{ii} = 0$), prohodíme řádky+sloupce.

  Např. zde prohodíme 2. a 4. řádek+sloupec:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{řád.}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{slo.}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Když pro nějaké i máme $a_{jj} = 0$ pro všechna $j \geq i$, tak matice buď je již diagonální nebo je indefinitní (protože nesplňuje $\det \mathbf{A}_I \geq 0$ pro $I = \{i, j\}$).

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Choleského a LDL rozklad

Na symetrické Gaussově eliminaci jsou založené numerické algoritmy:

- LDL rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$
- Choleského rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^T$

kde **A** je pos/neg semidefinitní, **L** (permutovaná) dolní trojúhelníková a **D** diagonální.

Viz funkce `ldl` a `chol` v Matlabu!

Spektrální rozklad

Vlastní čísla a vektory

Když pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v},$$

pak λ se nazývá **vlastní číslo** matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}$ **vlastní vektor** příslušný λ.

Interpretace: $\mathbf{v}$ je vektor, který lineární zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ zobrazí na rovnoběžný vektor.

- Přepíšeme jako $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
  To má netriviální řešení právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.
- Tedy vlastní čísla jsou právě kořeny **charakteristického polynomu**

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda).$$

  Je to polynom stupně n, tedy $\mathbf{A}$ má n vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, počítaje násobnost.

Vlastní vektory příslušné λ pak tvoří (kromě počátku) množinu $\operatorname{null}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, **vlastní podprostor** příslušný λ.

Příklad pro $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Dva reálné kořeny $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$, každý s násobností 1.

Vlastní vektory příslušné λ_1 jsou (nenulovými) řešeními homogenní lineární soustavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Vlastní podprostor příslušný λ_1 je přímka $\operatorname{null}(\mathbf{A} + \lambda_1 \mathbf{I}) = \operatorname{span}\{(-1, 1)\}$.

Maticový tvar

Soustavu

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

lze napsat maticově jako

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}$$

kde

$$\mathbf{V} = [\, \mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n \,], \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

V Matlabu: `[V,D]=eig(A)` (kde `D` označuje $\boldsymbol{\Lambda}$)

Spektrální rozklad symetrické matice

Věta (spektrální věta)

Pro každou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (tedy $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) platí:

- Všechna její vlastní čísla matice jsou reálná.
- Existuje množina n jejích vlastních vektorů, které jsou po dvojicích ortogonální.

Důsledek (spektrální rozklad symetrické matice)

Každou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ lze rozložit jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T$$

kde $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{V} = [\, \mathbf{v}_1 \; \cdots \; \mathbf{v}_n \,] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální.

Důkaz: V rovnici $\mathbf{AV} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}$ lze zvolit matici $\mathbf{V}$ ortonormální, tedy $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T$.

Úmluva

Diagonální prvky matice $\boldsymbol{\Lambda}$ budeme řadit sestupně: $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

(Matlab je bohužel řadí vzestupně)

Vztah ke kongruenci a diagonalizaci

Matice $\mathbf{A}$ je kongruentní diagonální matici $\boldsymbol{\Lambda}$:

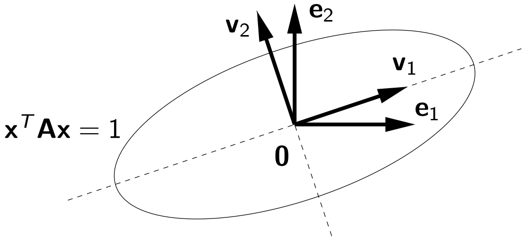
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = g(\mathbf{y})$$

Změna souřadnic $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{y}$ (tj. $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$) je nejen bijekce, ale dokonce isometrie.

Definitnost matice $\mathbf{A}$ ihned vidíme ze znamének vlastních čísel.

Příklad pro $n = 2$:

- Isometrie $\mathbf{V} = [\,\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2\,]$ určuje natočení vrstevnic kvadr. formy f (kuželoseček).
  Ty mají hlavní osy ve směru vlastních vektorů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$.
- Vlastní čísla λ_1, λ_2 určují typ kuželosečky.



Kvadratické funkce

Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je polynom $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ druhého stupně, tj.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$$

pro nějaké $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

Příklad pro $n = 2$:

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 3 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3$$

Doplnění kvadratické funkce na čtverec

Pro některé kvadratické lze nalézt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + y_0 \\ &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + y_0 \\ &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \underbrace{- \mathbf{x}_0^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{b}^T}\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}_0^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + y_0}_{c} \end{aligned}$$

Aby to platilo, koeficienty u stejných monomů se musí rovnat:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}_0 \qquad (*) \\ c &= \mathbf{x}_0^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + y_0 \end{aligned}$$

- Rovnice $(*)$ je vlastně stacionární podmínka $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
- Doplnění na čtverec je možné, právě když rovnice $(*)$ má řešení (tj. f má aspoň jeden stacionární bod).
- Nová funkce je kvadratická forma s počátkem posunutým do bodu $(\mathbf{x}_0, y_0)$. Z ní ihned zjistíme, zda f má extrém a jaký.

Příklad: Tato kvadr. funkce doplnit na čtverec jde:

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 3 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3$$
$$= \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} + 1$$
$$= 2(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) + (y-2)^2 + 1$$

tedy $\mathbf{x}_0 = (1,2)$, $y_0 = 1$.

Příklad: A tato nejde:

$$f(x,y) = x^2 + y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Soustava $\mathbf{b} = -(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{x}_0$, tj.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

nemá řešení.

Kvadriky

Množina

$$\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0 \,\}$$

kořenů (= vrstevnice výšky 0) kvadratické funkce se nazývá **kvadrika**.

Některé speciální případy:

- **kuželosečka**: kvadrika pro $n = 2$
- **elipsoid**: $\mathbf{A}$ je positivně definitní
  elipsoid se středem v počátku: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$