Stromy

Karel Richta a kol.

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

© Karel Richta a kol., 2021

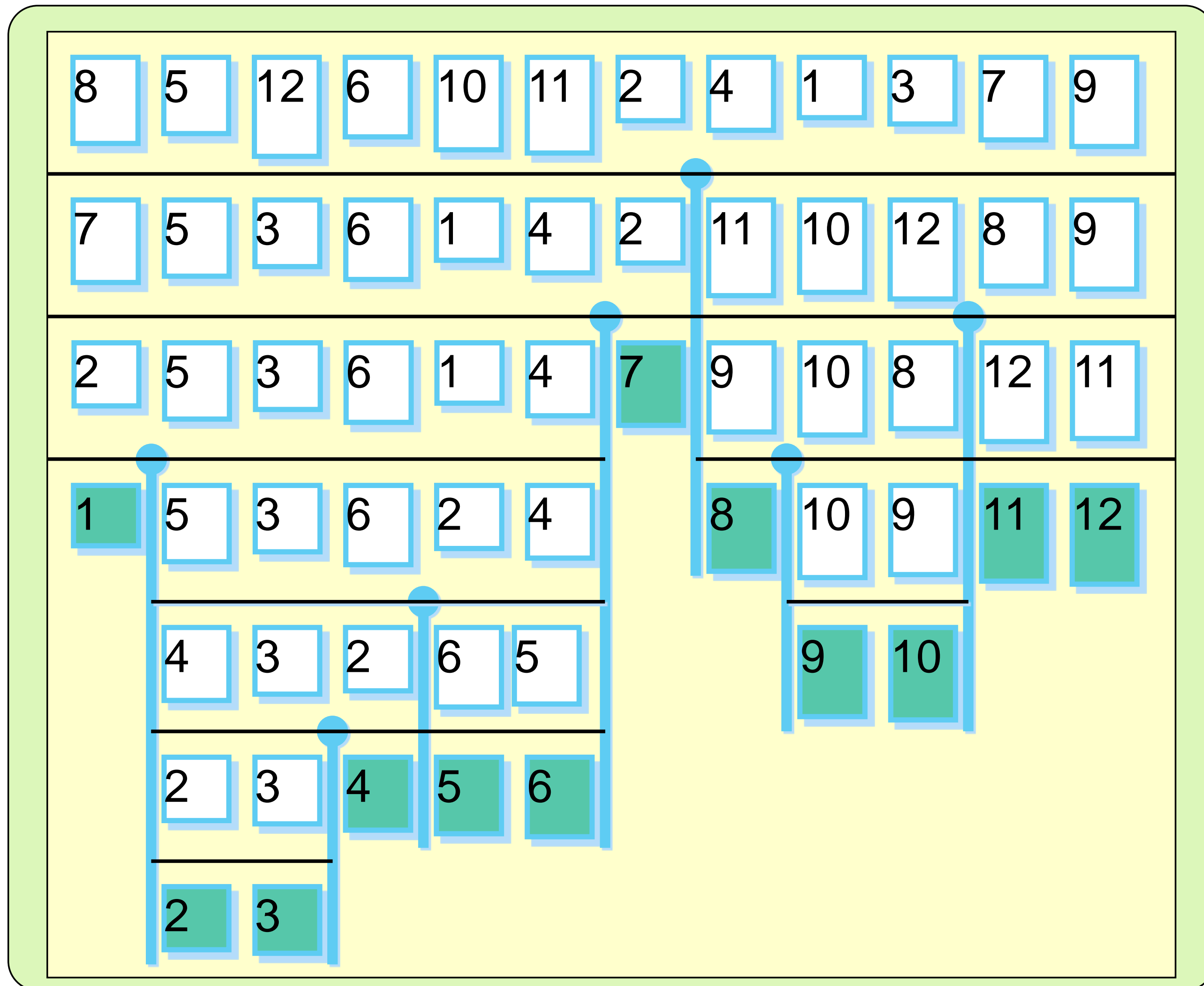
Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
02/2021, Lekce 9

https://moodle.fel.cvut.cz/course/view.php?id=5973

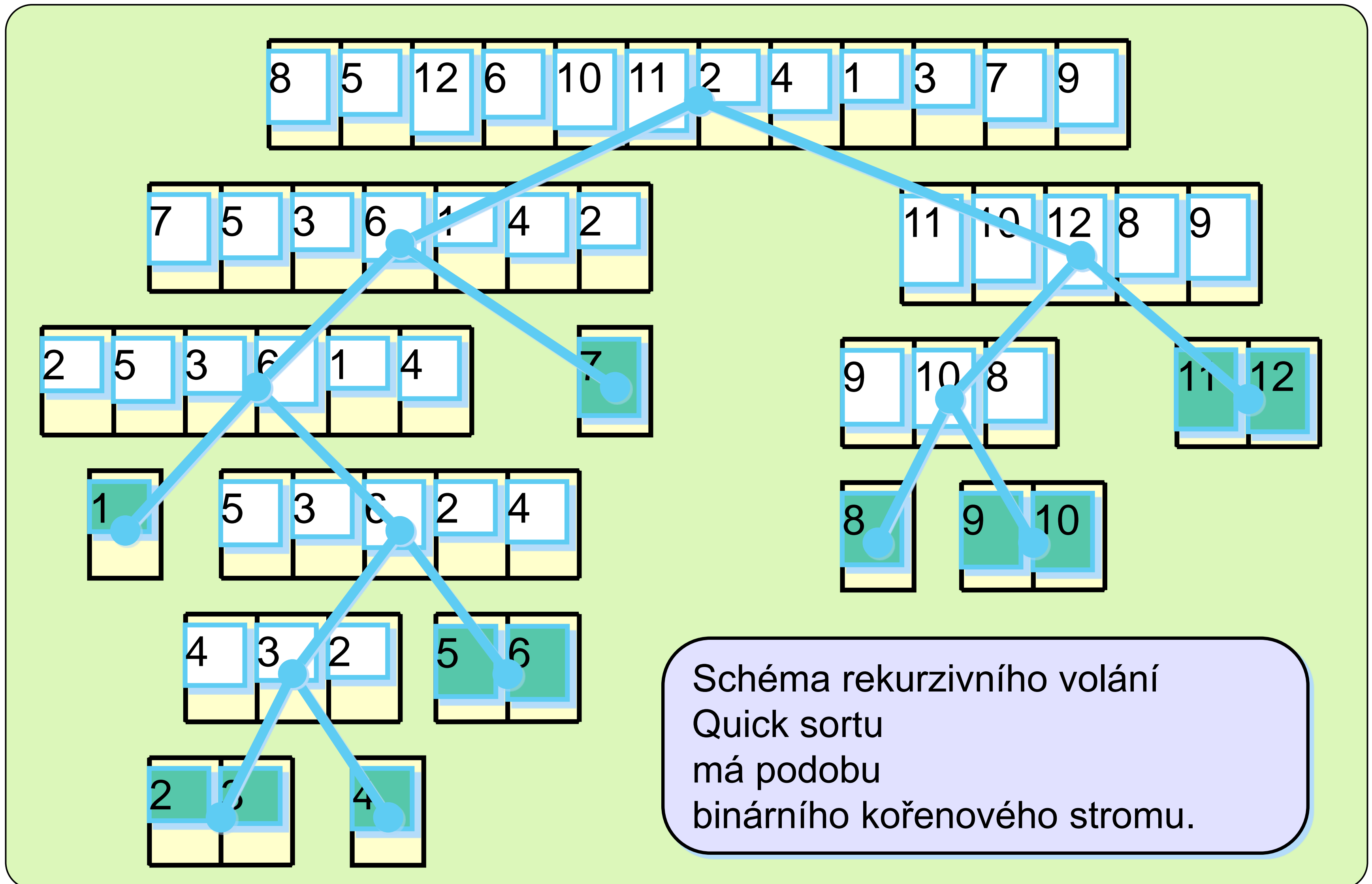
Připomenutí: QUICKSORT

Ukázka průběhu

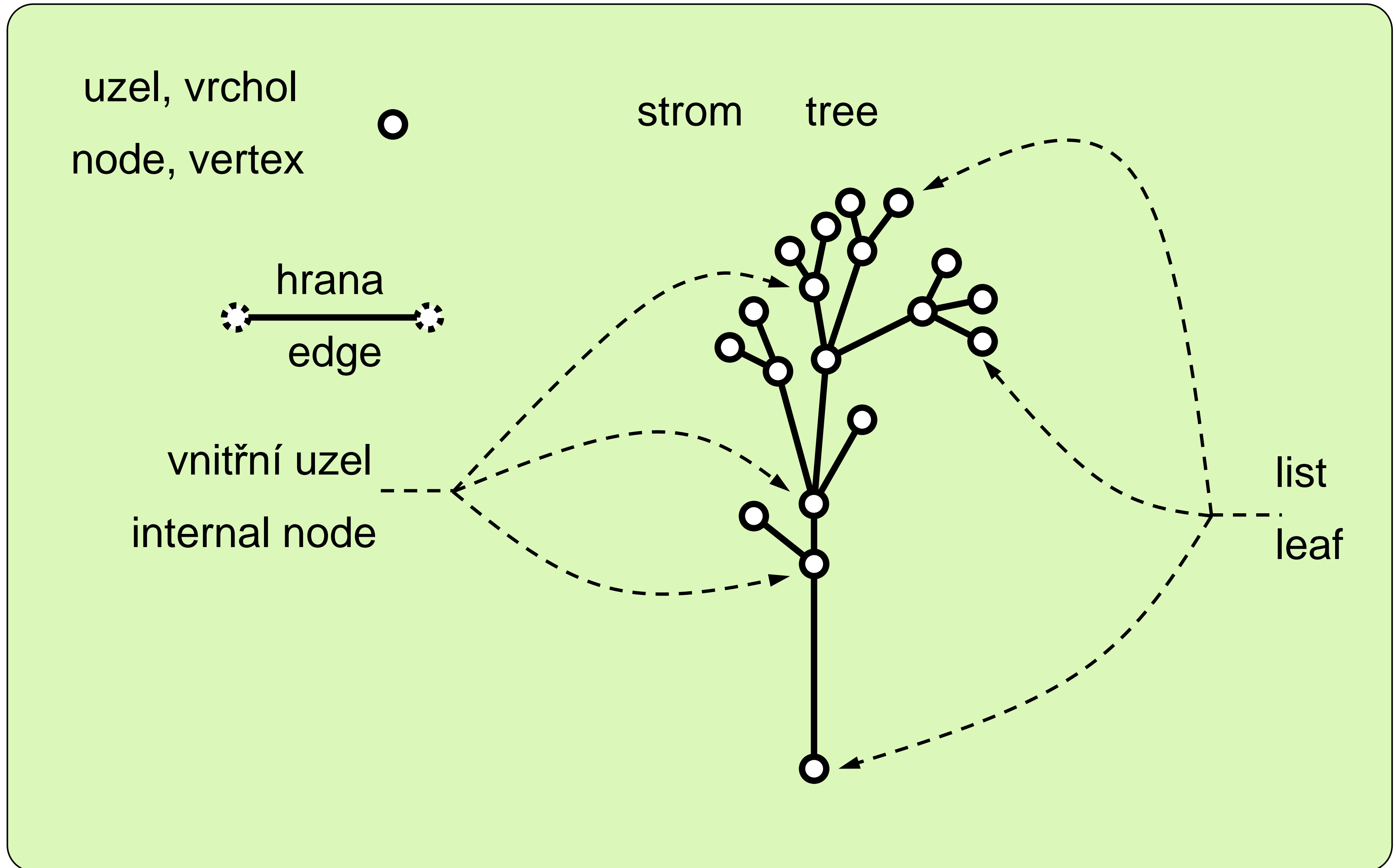
pivot =
= první
v úseku



Motivace: QuickSort



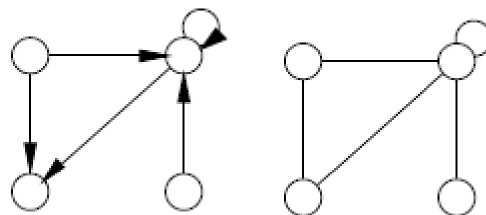
Strom



Orientované a neorientované grafy

Definice

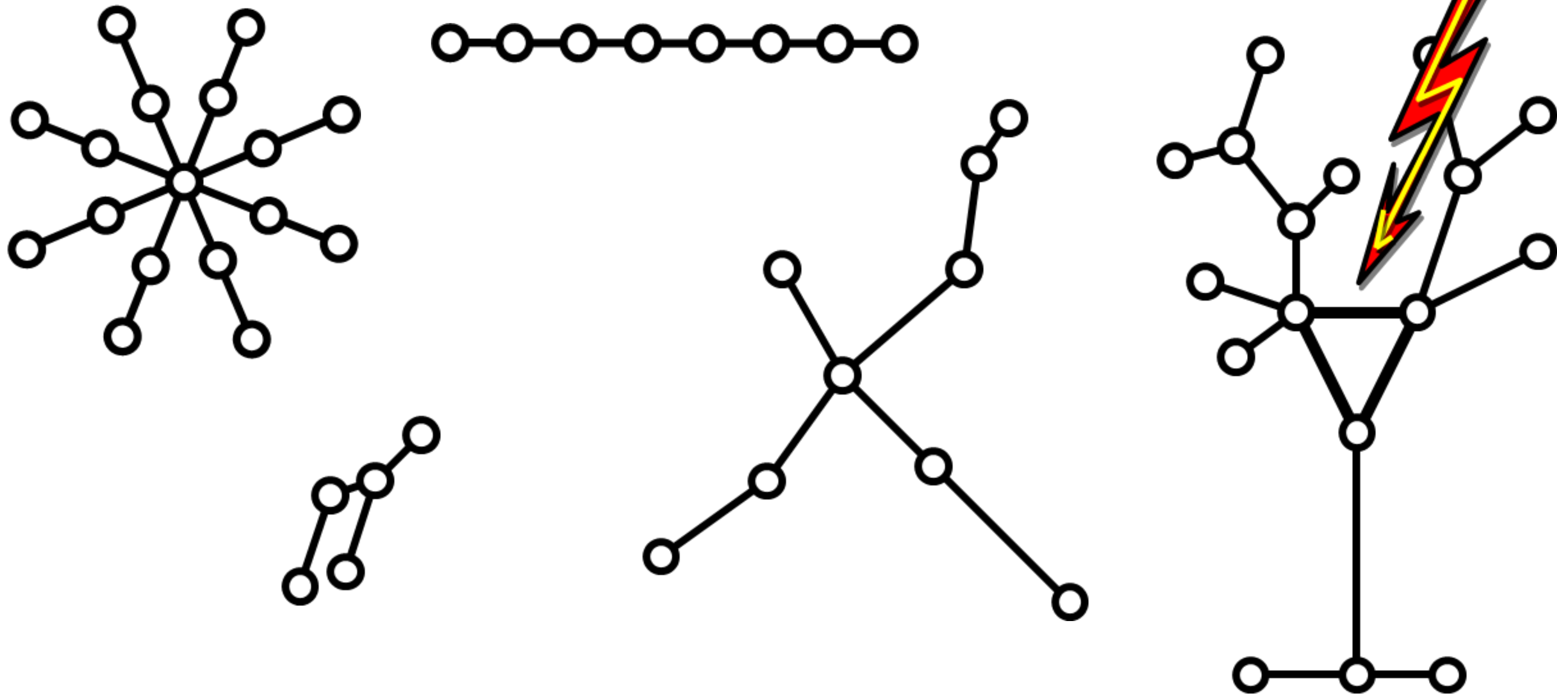
- **Orientovaný graf** *o* n *uzlech je dvojice* $G = (V(G), E(G))$, *kde*
  - $V(G)$ *je* **množina uzlů**, $n = |V(G)|$, *a*
  - $E(G) = \{\langle u, v\rangle; u, v \in V(G)\} \subset V(G) \times V(G)$ = **množina orientovaných hran**, *čili* **uspořádaných** *dvojic uzlů (graficky šipek).*
  - *Orientovaná hrana* $\langle u, u\rangle$ *se nazývá* **smyčka**.
- **(Neorientovaný obyčejný) graf** *o* n *uzlech je dvojice* $G = (V(G), E(G))$, *kde* $V(G)$ *je* **množina uzlů** *a*
  - $E(G) = \{\{u, v\}; u, v \in V(G), u \neq v\}$ = **množina neorientovaných hran**, *čili* **neuspořádaných** *dvojic uzlů.*
  - *Smyčky se někdy povolují, někdy ne.*



Definice stromu (volného stromu)

Definice

- **Volný strom** *je každý souvislý acyklický a neorientovaný graf.*
- **Les** *je každý acyklický a neorientovaný graf.*



Vlastnosti volných stromů

Věta

Nechť $G = (V(G), E(G))$ *je neorientovaný graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. G *je volný strom.*
2. *Jakékoli 2 uzly v* G *jsou spojeny jedinečnou jednoduchou cestou.*
3. G *je souvislý, ale pokud vyjmeme jakoukoli hranu z* $E(G)$*, výsledný graf bude nesouvislý.*
4. G *je souvislý a* $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
5. G *je acyklický a* $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
6. G *je acyklický, ale pokud přidáme jakoukoli hranu do* $E(G)$*, výsledný graf bude obsahovat aspoň jeden cyklus.*

Kořenové stromy

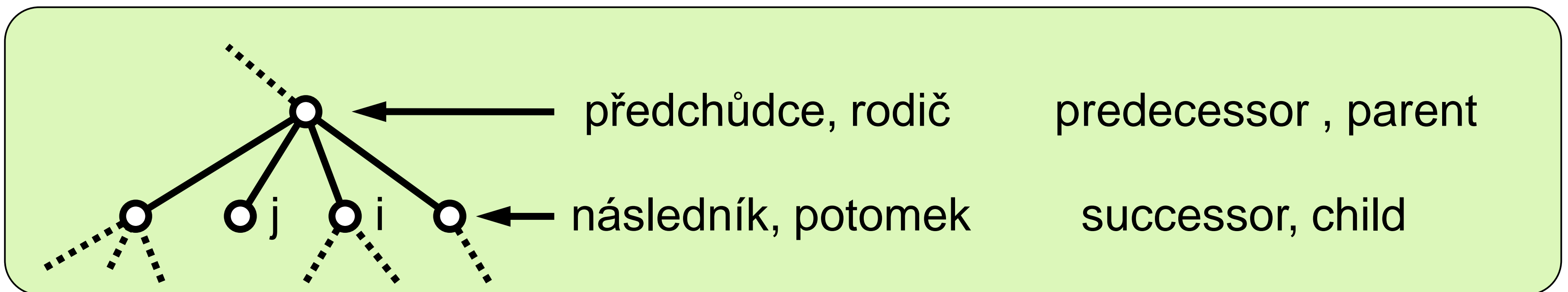
kořenový strom rooted tree

kořen

root

k l m b j a c h R i n d e g f

R
a b c
m j i n d
k l h e f
g

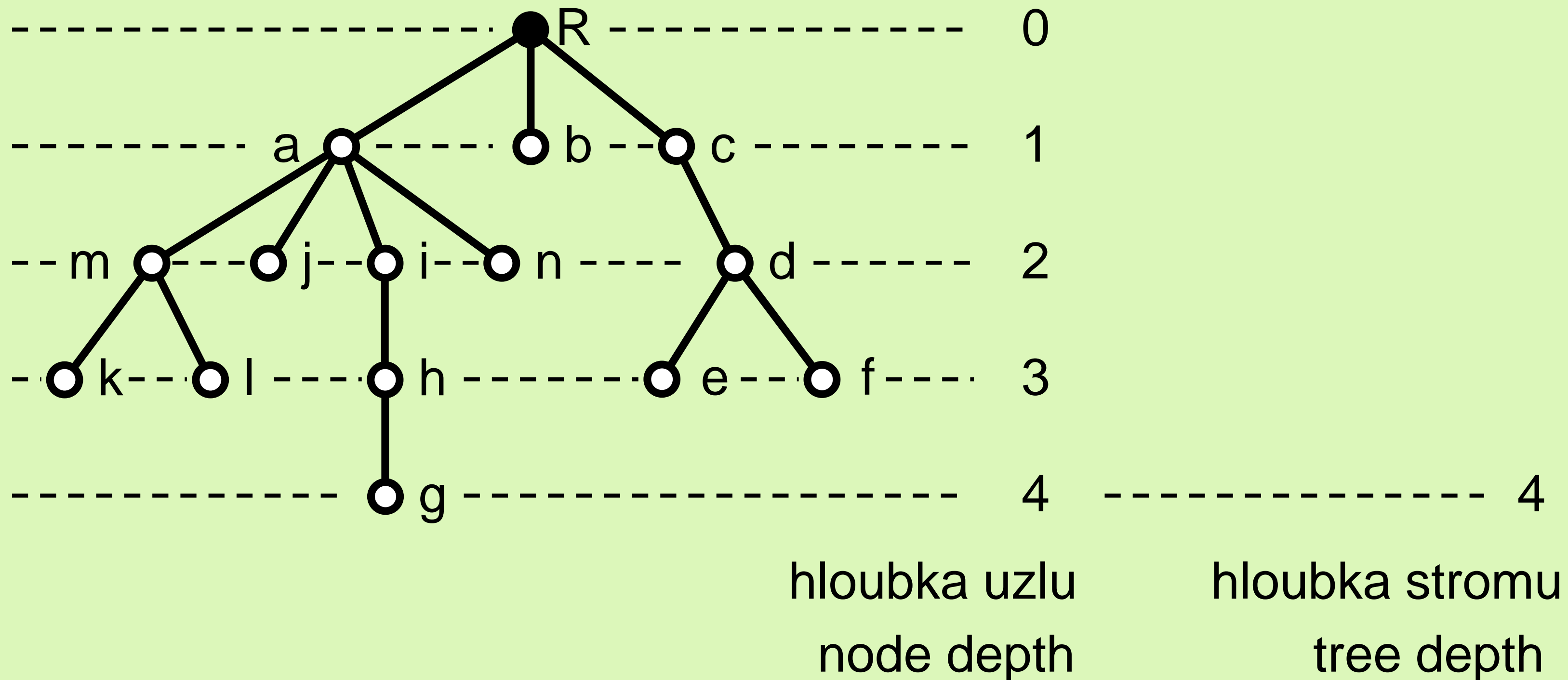


Definice kořenového stromu

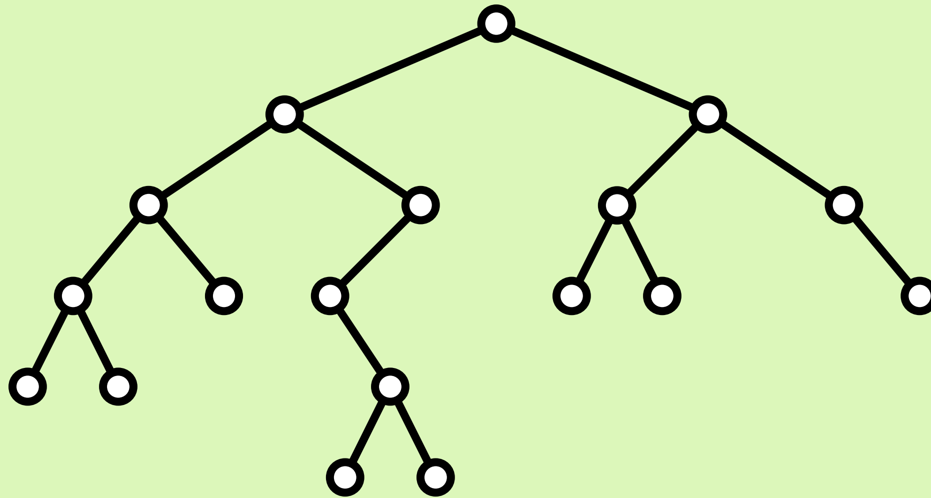
Definice

- **Kořenový strom** *je volný strom, ve kterém jeden z uzlů je odlišen od ostatních jako* **kořen**, r.
- *Uzly* u *ve vzdálenosti* d *od kořenu* r *tvoří hladinu uzlů v* **hloubce** $h(u) = d$. *Kořen má hloubku* $h(r) = 0$.
- *Nechť uzel* u *leží na (jedinečné) cestě z kořene* r *do uzlu* v. *Pak* u *je* **předek** v *a* v *je* **potomek** u.
- *Nejbližší předek uzlu je jeho* **rodič** *a nejbližší potomek je jeho* **syn**.
  $\Rightarrow$ *Každý uzel kromě kořenu má jedinečného rodiče.*
- *Uzly se stejným rodičem jsou* **sourozenci**.
- *Uzel, který nemá potomky, se nazývá* **list**. *Ostatní uzly jsou* **vnitřní**.
- **Stupeň** *vnitřního uzlu je počet jeho synů (rodič se nepočítá)!!!!!!!*
- k-**ární strom**: *každý vnitřní uzel má stupeň* **nejvýše** k.

Hloubka kořenového stromu

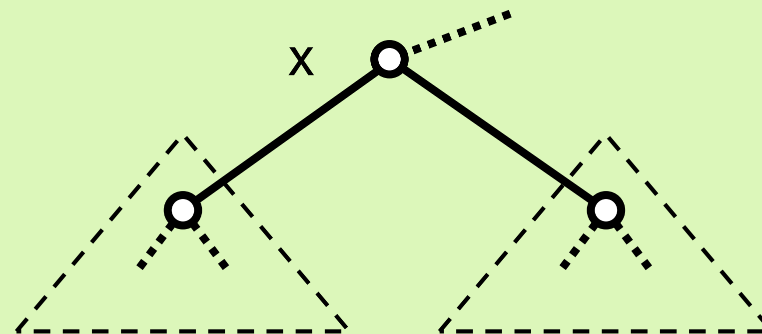


Binární kořenové stromy



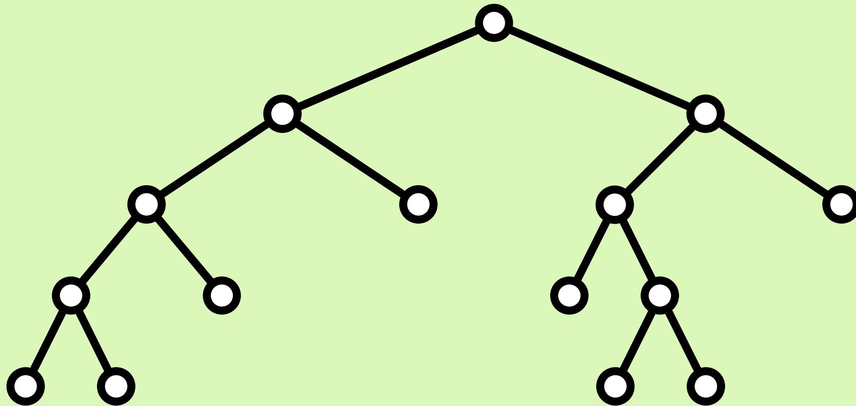
binární (kořenový!!) strom
0, 1 nebo 2následníci

binary (rooted!!) tree
0, 1 or 2 successors



podstrom uzlu x .... levý .... pravý
subtree of node x .... left .... right

Pravidelné a vyvážené stromy

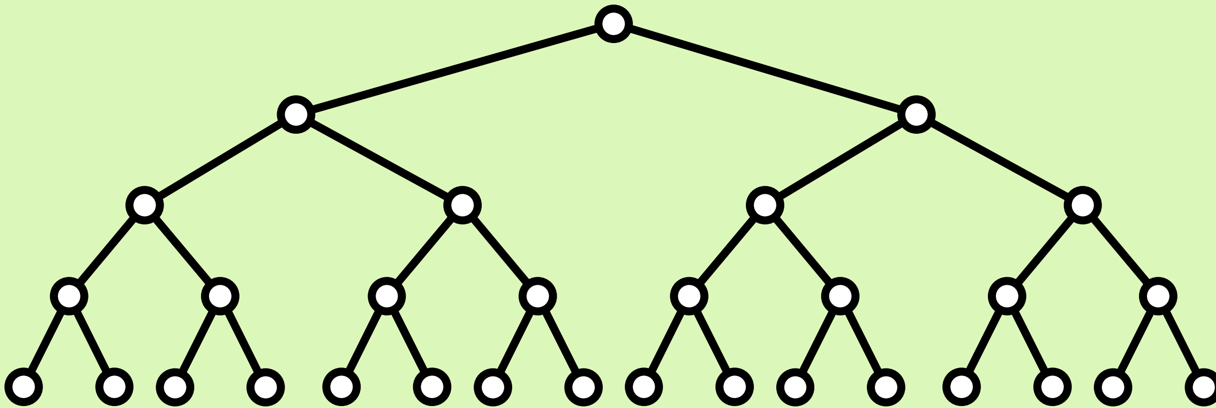


pravidelný binární strom

0 nebo 2 následníci

regular binary tree

0 or 2 successors



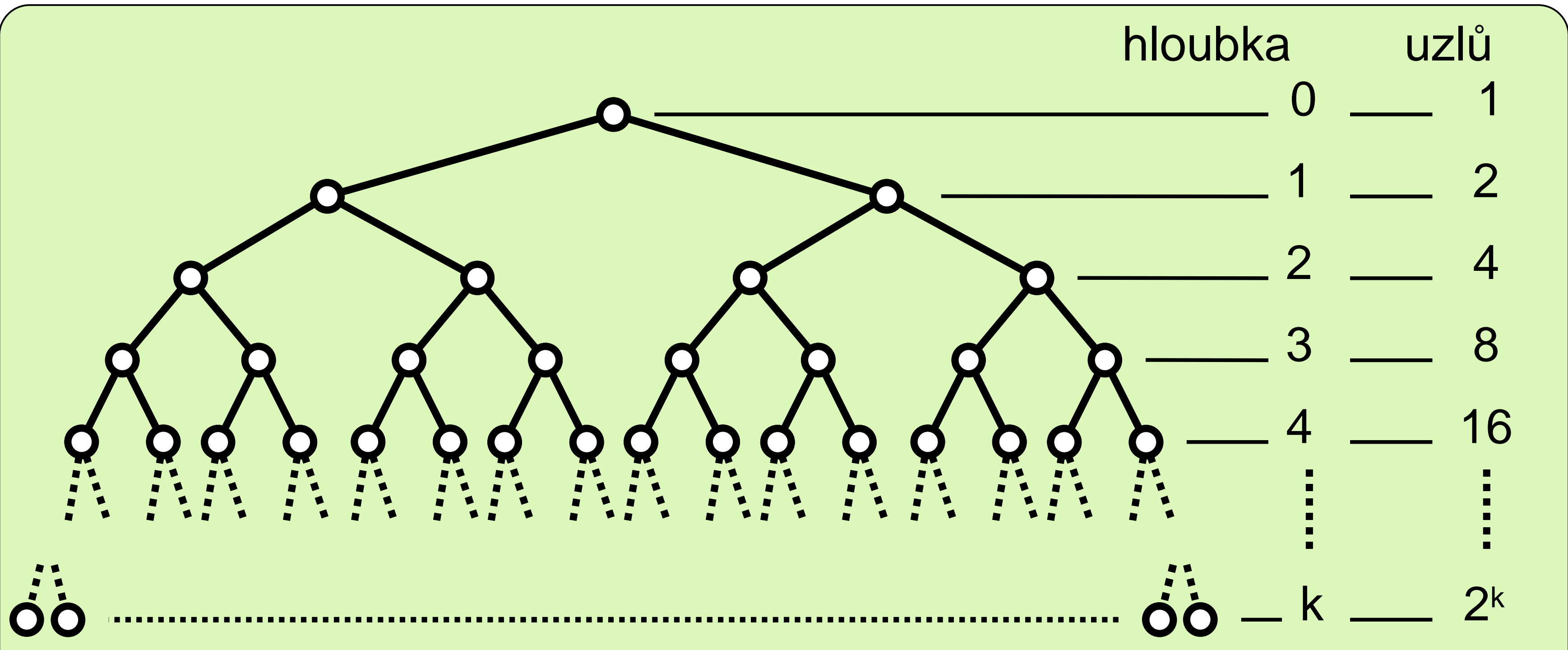
vyvážený strom

balanced tree

Hloubky všech listů jsou (víceméně) stejné.

All leaf depths are (more or less) equal.

Hloubka vyváženého stromu



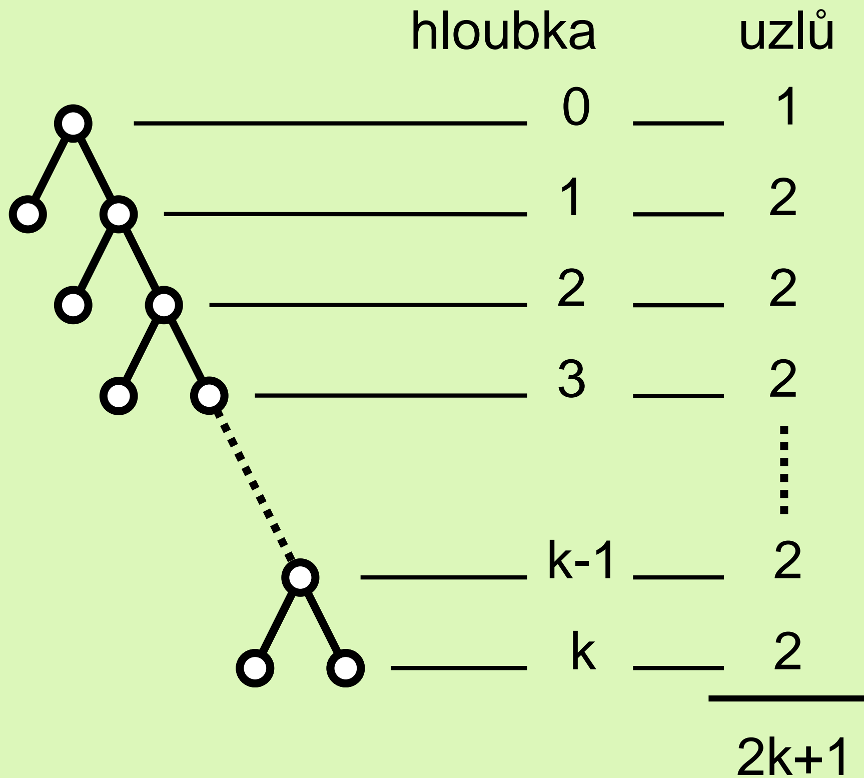
$$2^{k+1} - 1$$

$$(2^{(\text{hloubka stromu})+1} - 1) \sim \text{uzlů}$$

$$\text{hloubka stromu} \sim \log_2(\text{uzlů}+1) - 1$$

vyvážený strom: hloubka ~ $\log_2(\text{uzlů})$

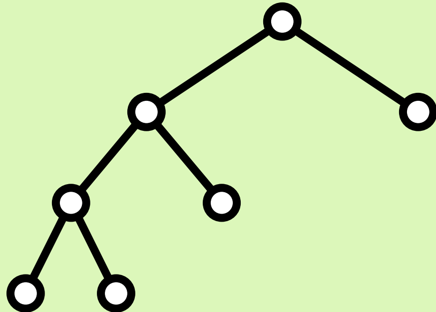
Hloubka nevyváženého stromu



2(hloubka)+1 ~ uzlů
hloubka ~ (uzlů−1)/2

extrémně nevyvážený pravidelný strom: hloubka ~ (uzlů−1)/2

Souhrn velikosti



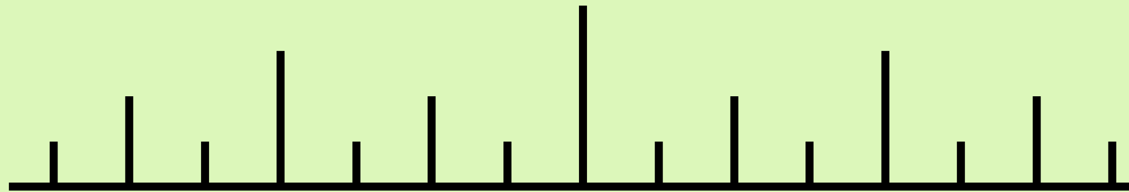
hloubka pravidelného stromu = O(počet uzlů)

obvykle

hloubka pravidelného stromu = $\Theta(\log_2$(počet uzlů))

Jednoduchý příklad rekurze

pravítko



rysky pravítka

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

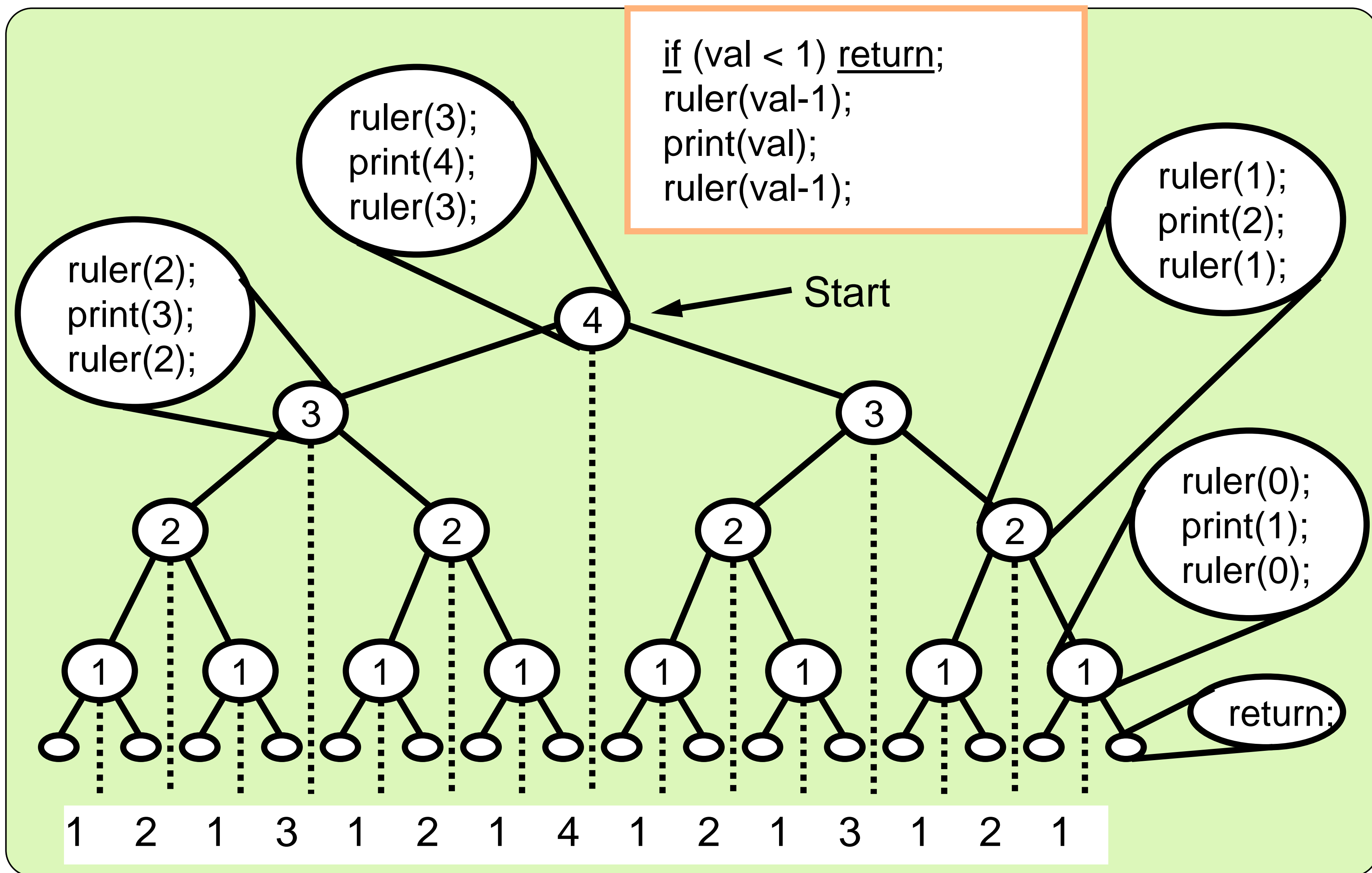
délky rysek

```
void ruler(int val) {
  if (val < 1) return;

  ruler(val-1);
  print(val);
  ruler(val-1);
}
```

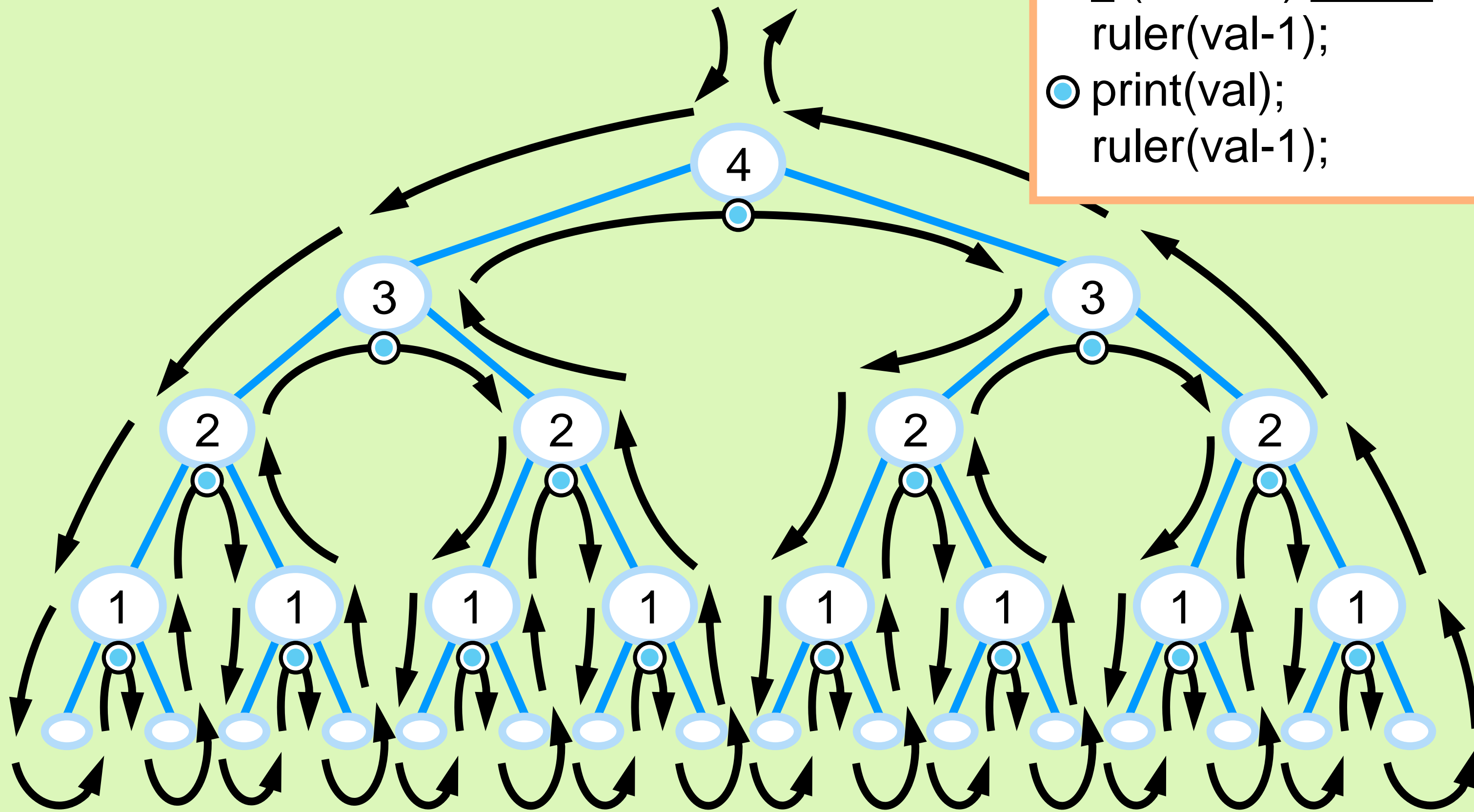
```
Call: ruler(4);
```

kód vypisující délky rysek pravítka

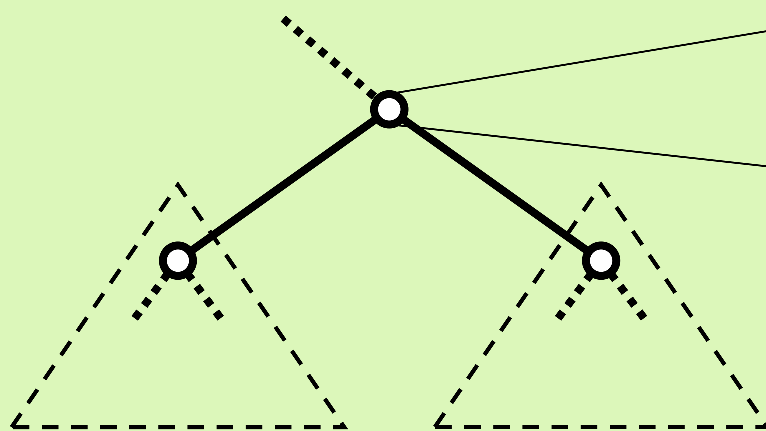
Jednoduchý příklad rekurze (pokr.)

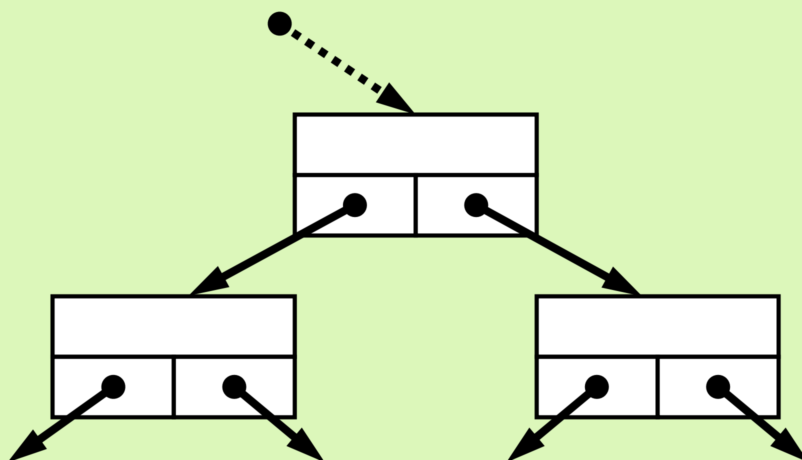


Jednoduchý příklad rekurze (pokr.)



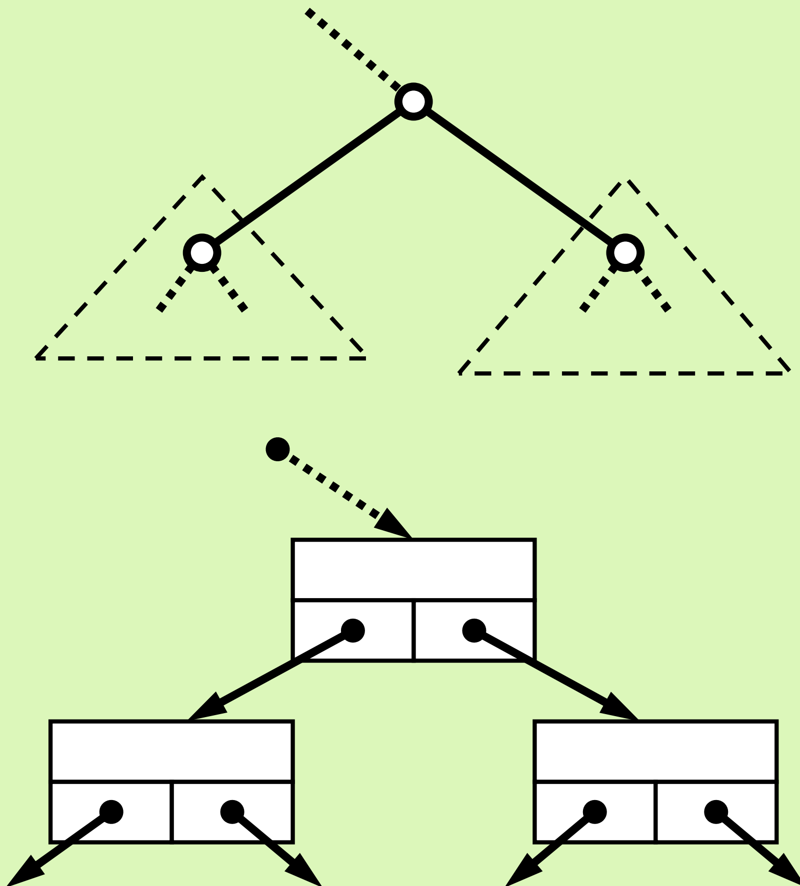
Implementace binárního stromu – C





```
typedef struct node {

   int key;
   struct node *left;
   struct node *right;

} NODE;
```

Implementace binárního stromu – Java



```
public class Node {
   public Node left;
   public Node right;
   public int key;
   public Node(int k) {
      key = k;
      left = null;
      right = null;
   }
}
public class Tree {
   public Node root;
   public Tree() {
      root = null;
   }
}
```

Vybudování náhodného binárního stromu v C

```
NODE *randTree(int depth) {
   NODE *pnode;
   if ((depth <= 0) || (random(10) > 7))
      return  (NULL);                           //stop recursion
   pnode = (NODE *) malloc(sizeof(NODE)); // create node
   if (pnode == NULL) {
      printf("%s", "No memory.");
      return NULL;
      }
  pnode->left = randTree(depth-1);      // make left subtree
  pnode->key = random(100);             // some value
  pnode->right = randTree(depth-1);     // make right subtree
  return pnode;                         // all done
 }
```

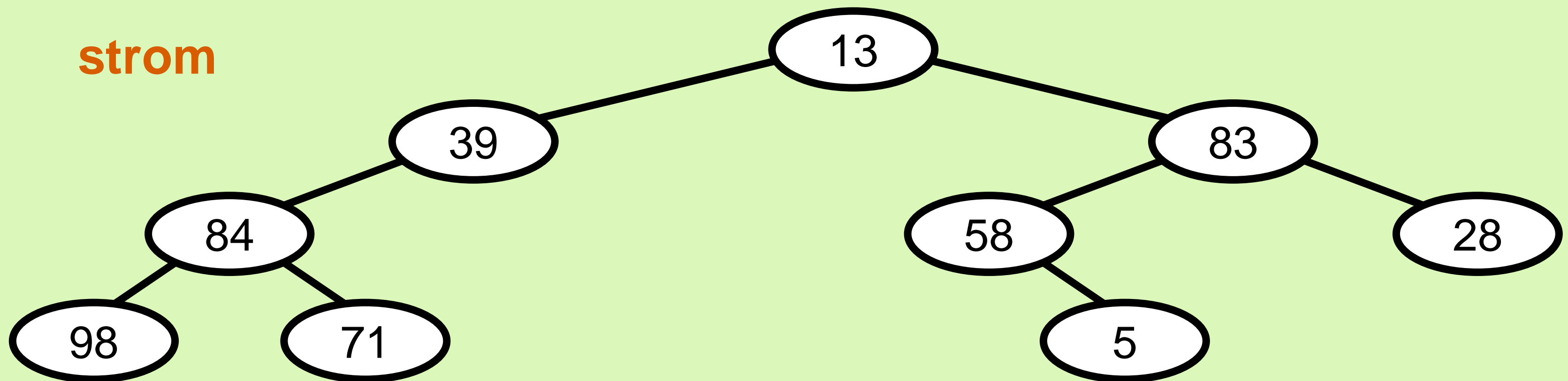
```
NODE *root;
root = randTree(4);
```

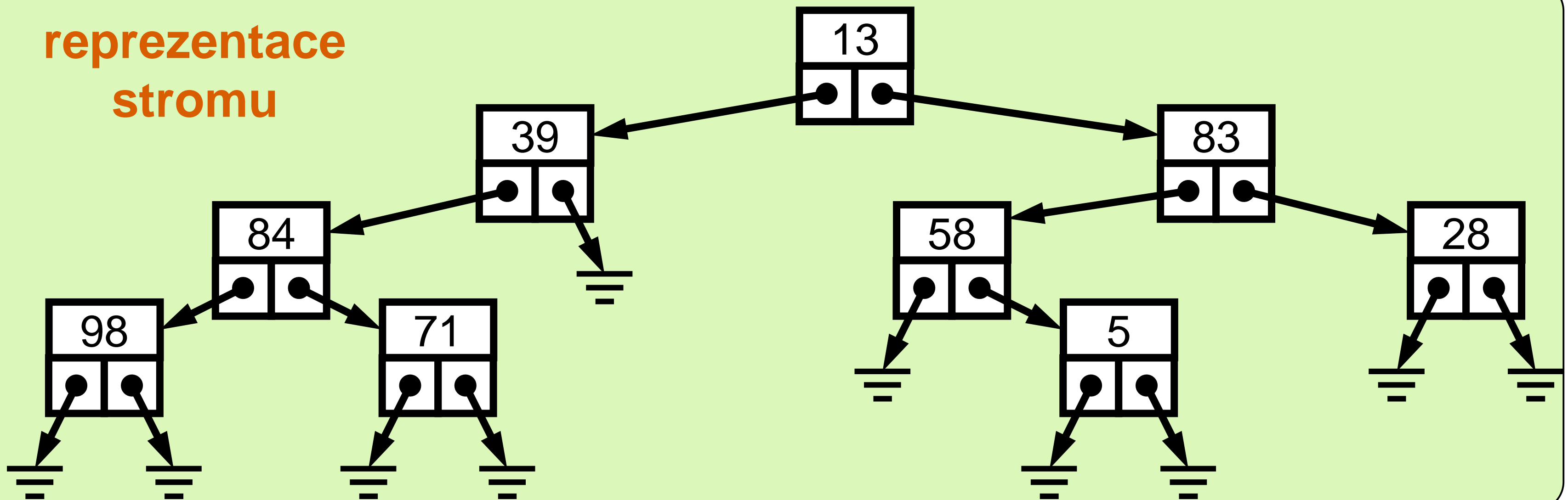
Vybudování náhodného binárního stromu v Javě

```
public Node randTree(int depth) {
  Node node;
  if ((depth <= 0) || ((int) Math.random()*10 > 7)
     return null;
                             // create node with a key value
  node = new Node((int)(Math.random()*100));

  node.left = randTree(depth-1);   // make left subtree
  node.right = randTree(depth-1); // make right subtree
  return node;                     // all done
}
```

```
Node root;
root = randTree(4);
```

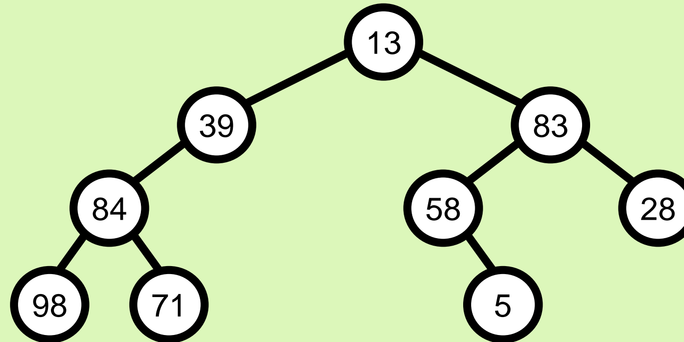
Náhodný binární strom





Průchod stromem v pořadí Inorder

Strom



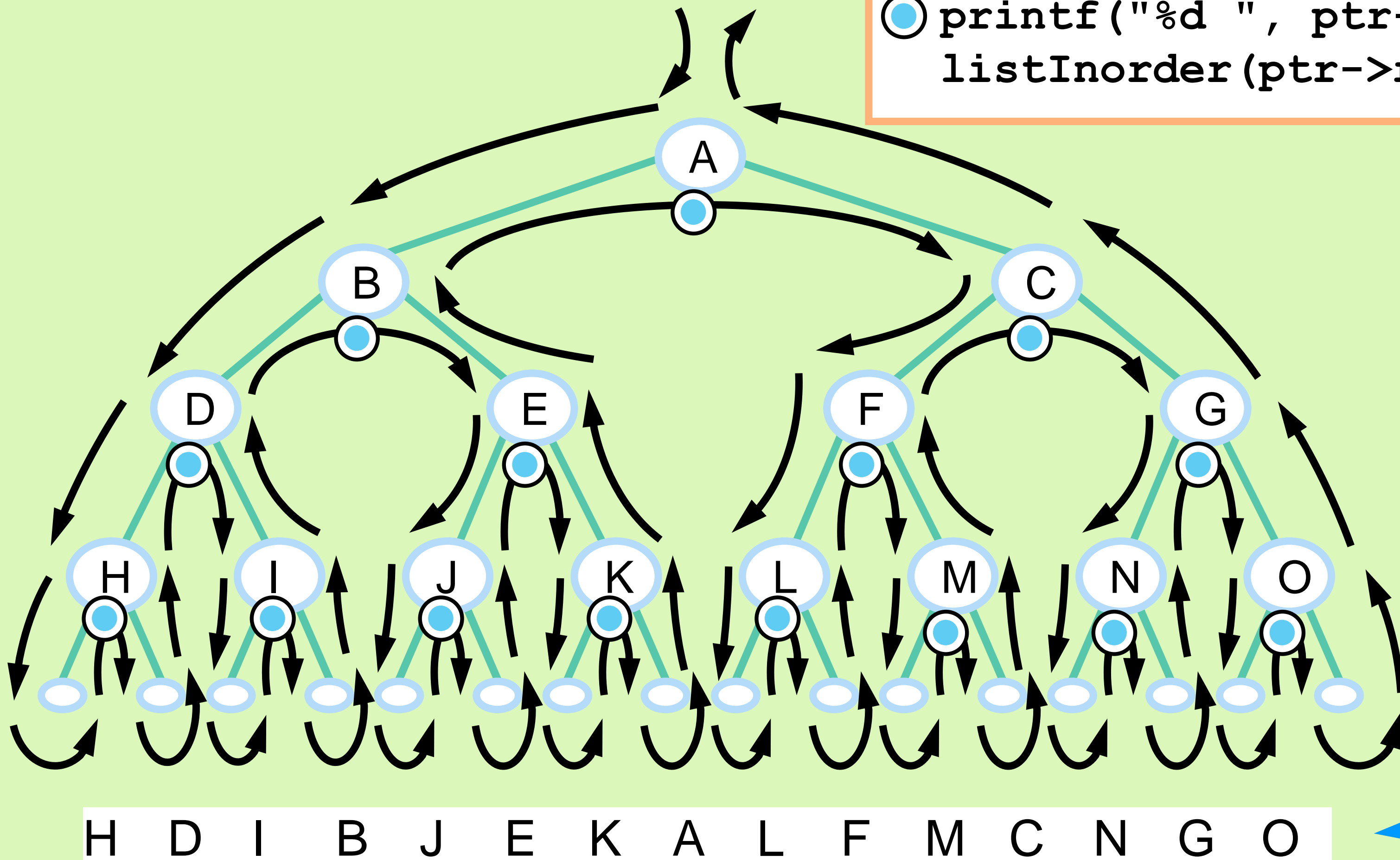
Průchod stromem v pořadí INORDER

```
void listInorder( NODE *ptr) {
   if (ptr == NULL) return;
   listInorder(ptr->left);
   printf("%d ", ptr->key);
   listInorder(ptr->right);
}
```

Výstup

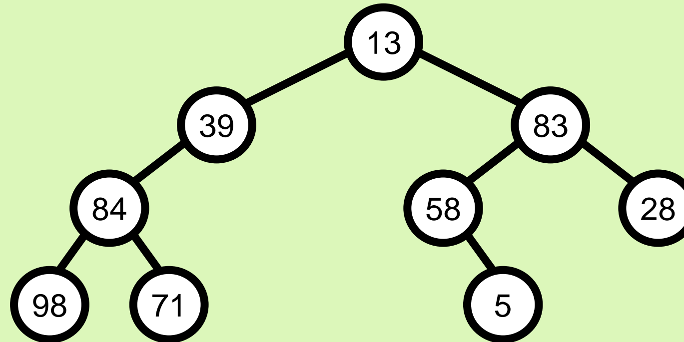
98 84 71 39 13 58 5 83 28

Rekurzivní pohyb v průchodu Inorder



Průchod stromem v pořadí Preorder

Strom



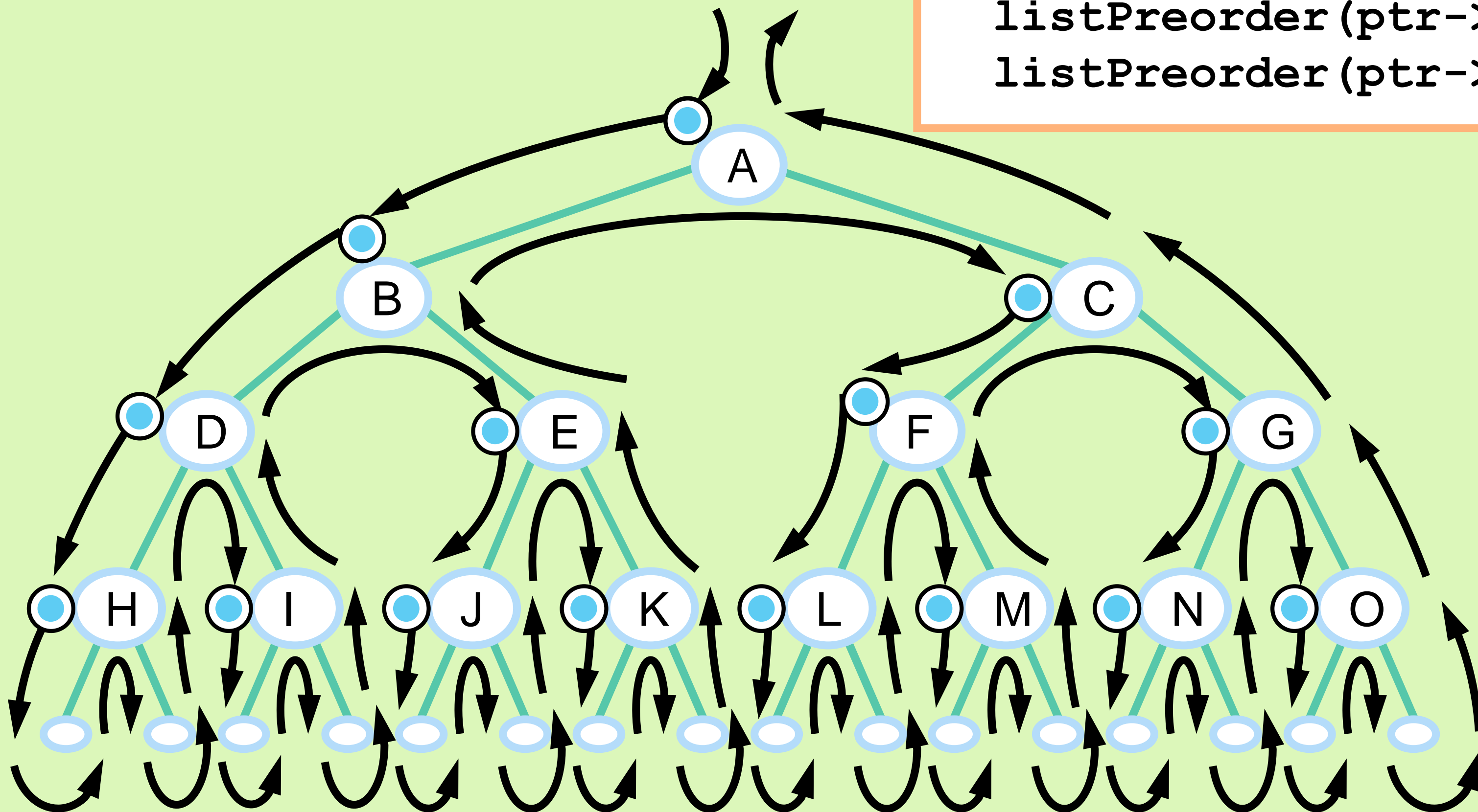
Průchod stromem v pořadí PREORDER

```
void listPreorder( NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return;
  printf("%d ", ptr->key);
  listPreorder(ptr->left);
  listPreorder(ptr->right);
}
```

Výstup

13 39 84 98 71 83 58 5 28

Rekurzivní pohyb v průchodu Preorder

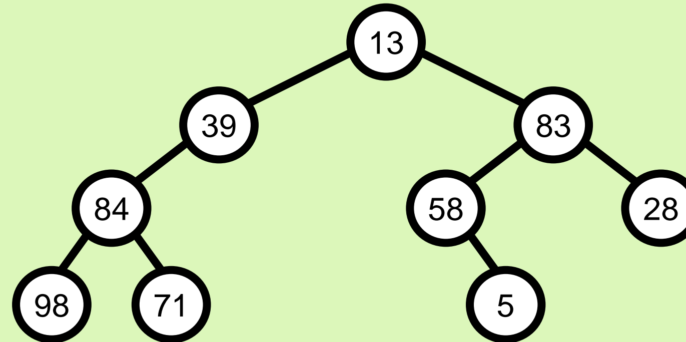



```
printf("%d ", ptr->key);
listPreorder(ptr->left);
listPreorder(ptr->right);
```

A B D H I E J K C F L M G N O

Průchod stromem v pořadí Postorder

Strom



Průchod stromem v pořadí POSTORDER

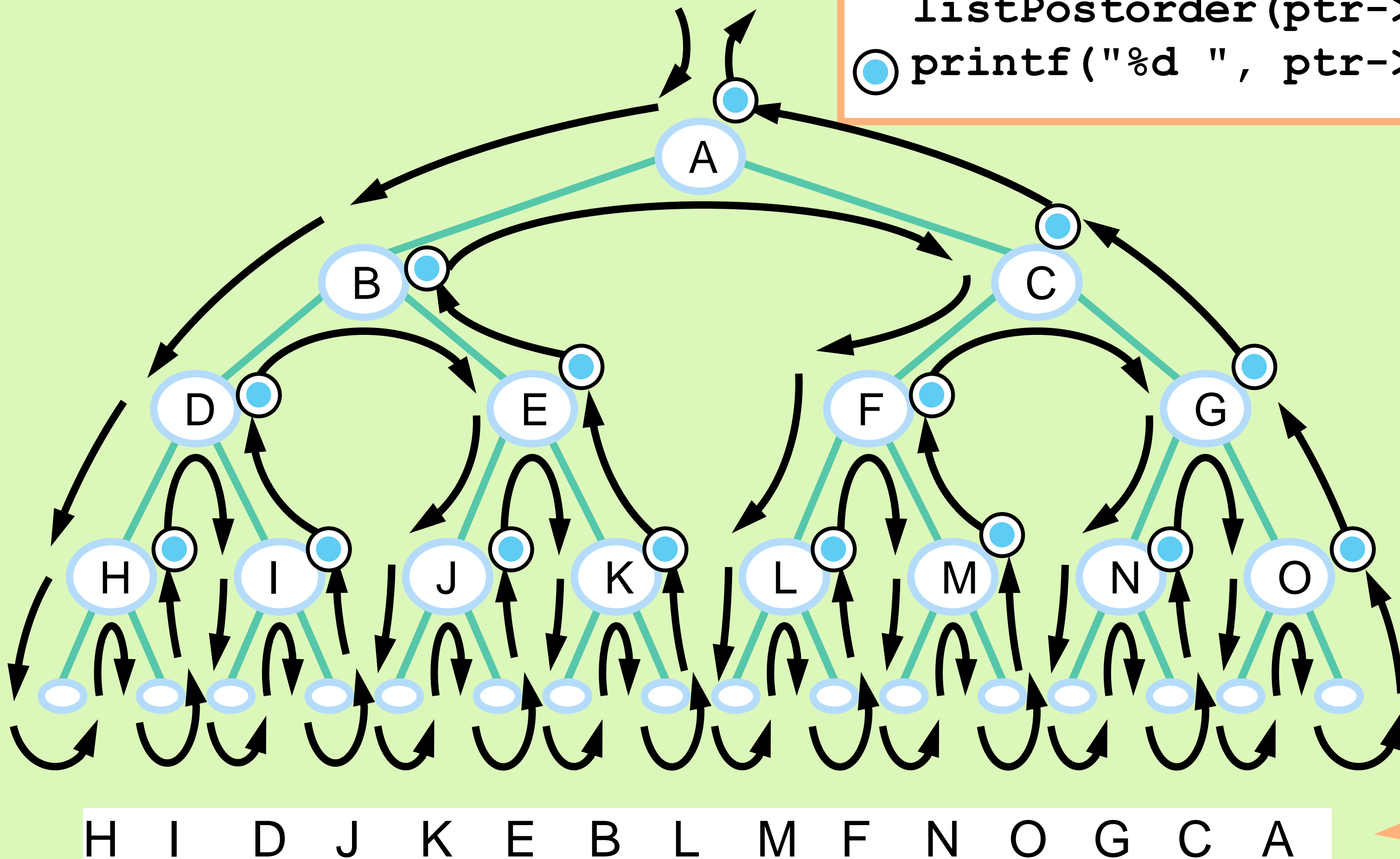
```
void listPostorder( NODE *ptr) {
   if (ptr == NULL) return;
   listPostorder(ptr->left);
   listPostorder(ptr->right);
   printf("%d ", ptr->key);
}
```

Výstup

98 71 84 39 5 58 28 83 13

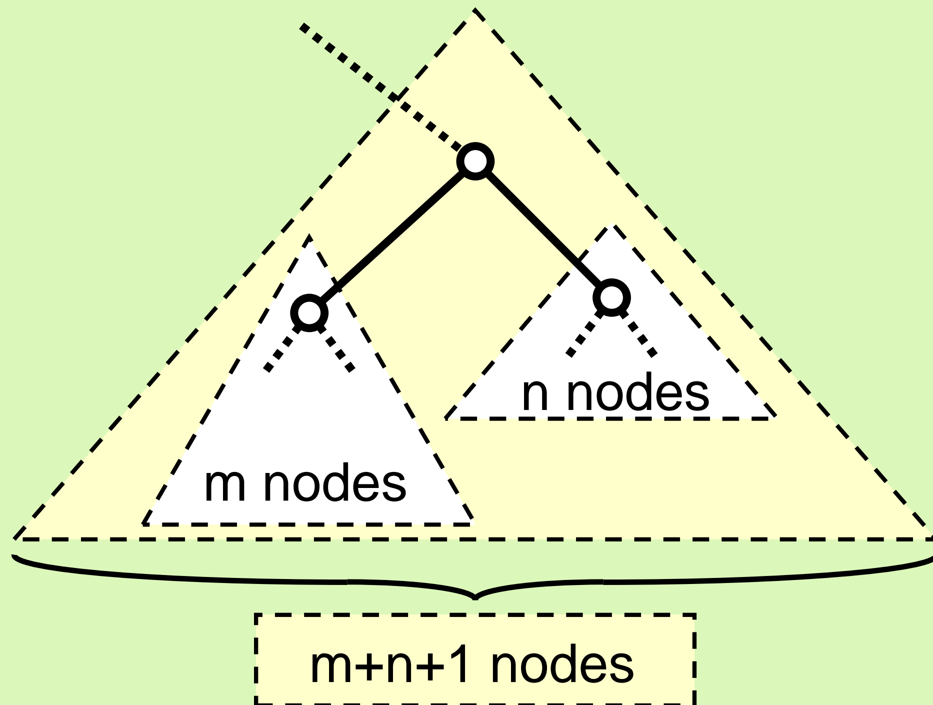
Rekurzivní pohyb v průchodu Postorder

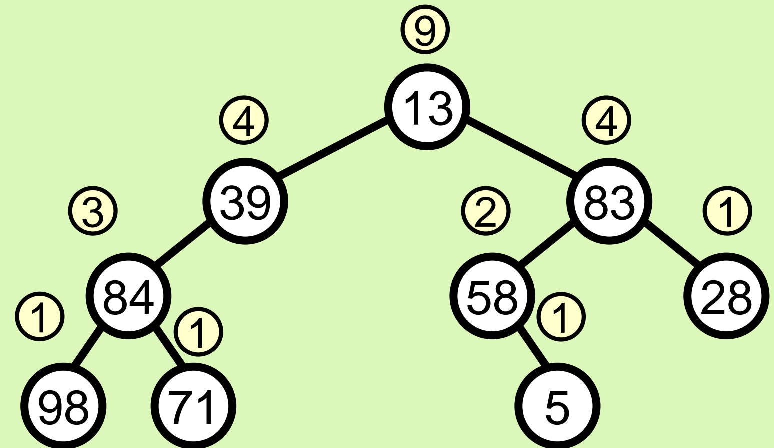
```
listPostorder(ptr->left);
listPostorder(ptr->right);
printf("%d ", ptr->key);
```



H I D J K E B L M F N O G C A

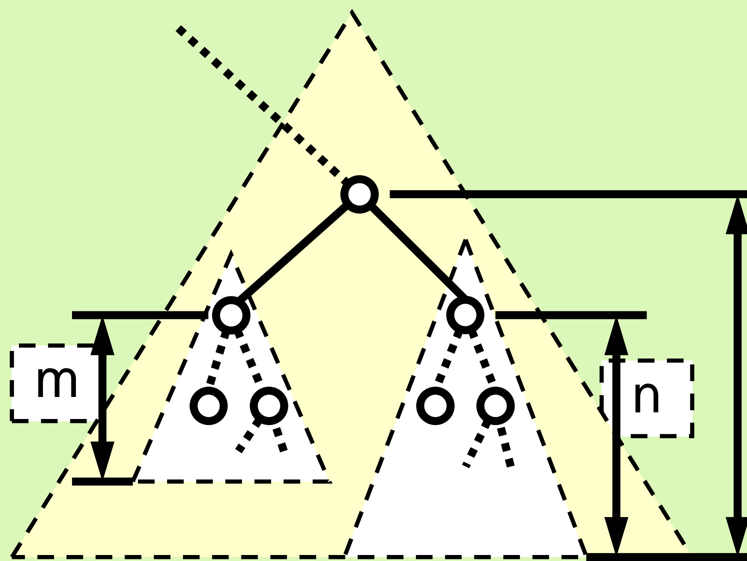
Velikost stromu rekurzivně

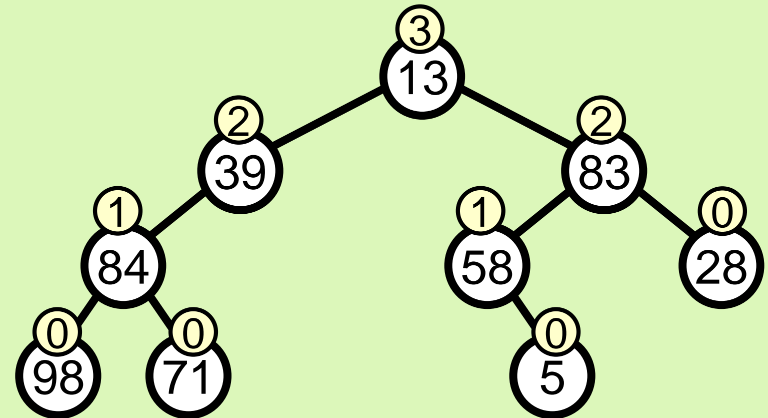





```
int count(NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return (0);
  return (count(ptr->left) + count(ptr->right)+1);
}
```

Hloubka stromu rekurzivně






```
int depth(NODE *ptr) {
  if (ptr == NULL) return (-1);
  return ( max(depth(ptr->left), depth(ptr->right) )+1 );
}
```

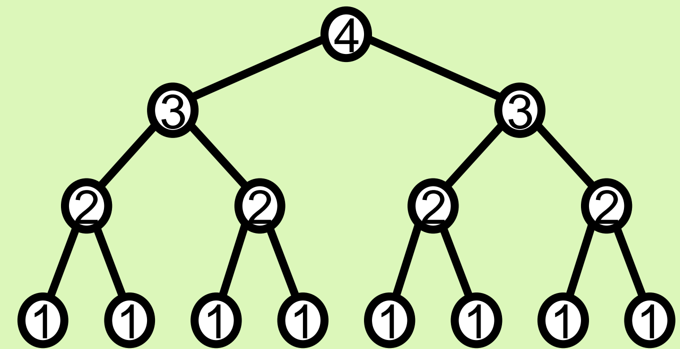
Zásobník implementuje rekurzi

Pravítko bez rekurze

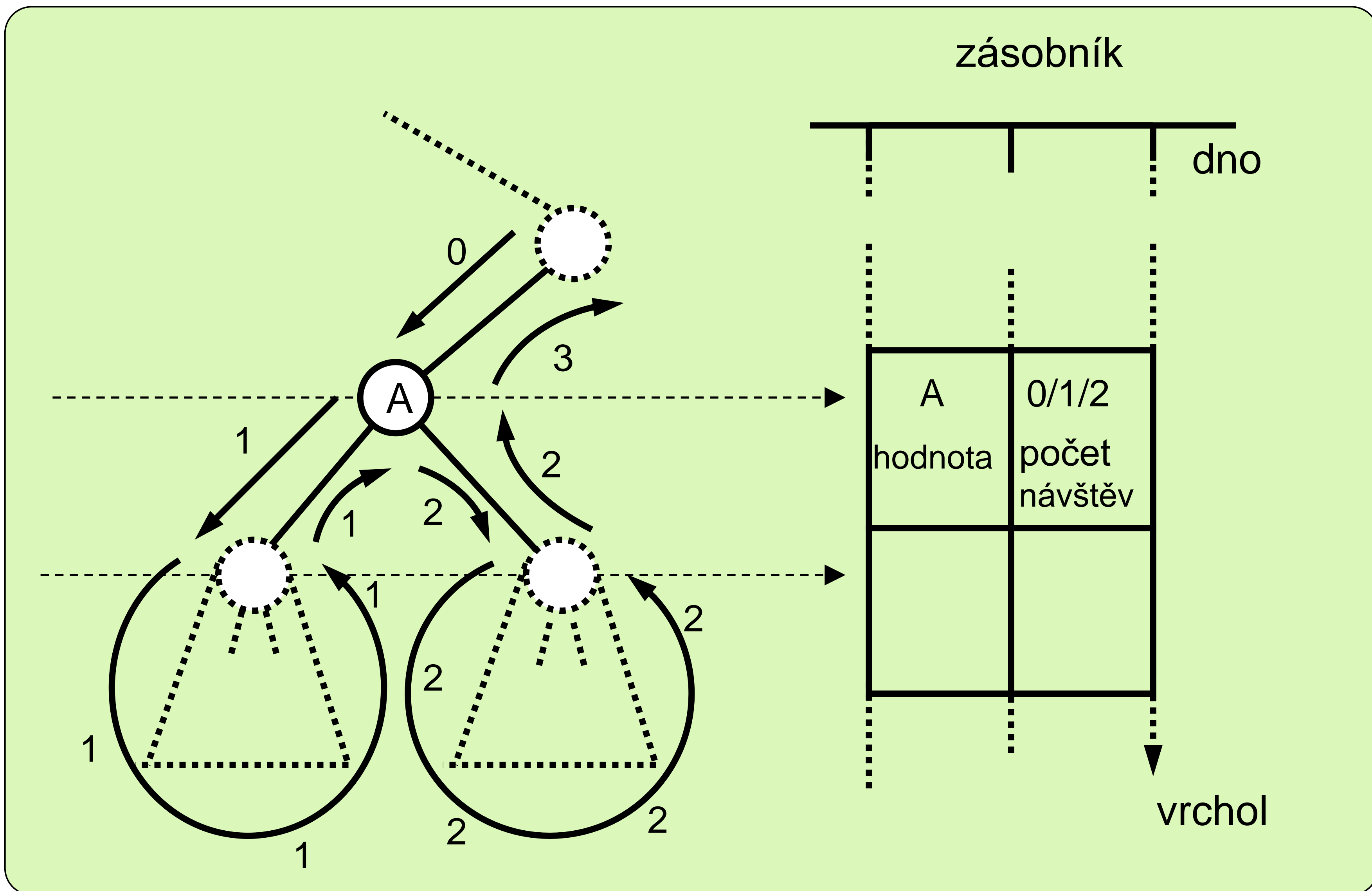
Uzel A navštíven 0x

Uzel A navštíven 1x

Uzel A navštíven 2x



Zásobník implementuje rekurzi



Zásobník implementuje rekurzi

Standardní strategie

Při používání zásobníku:

Je-li to možné, zpracovávej jen data ze zásobníku.

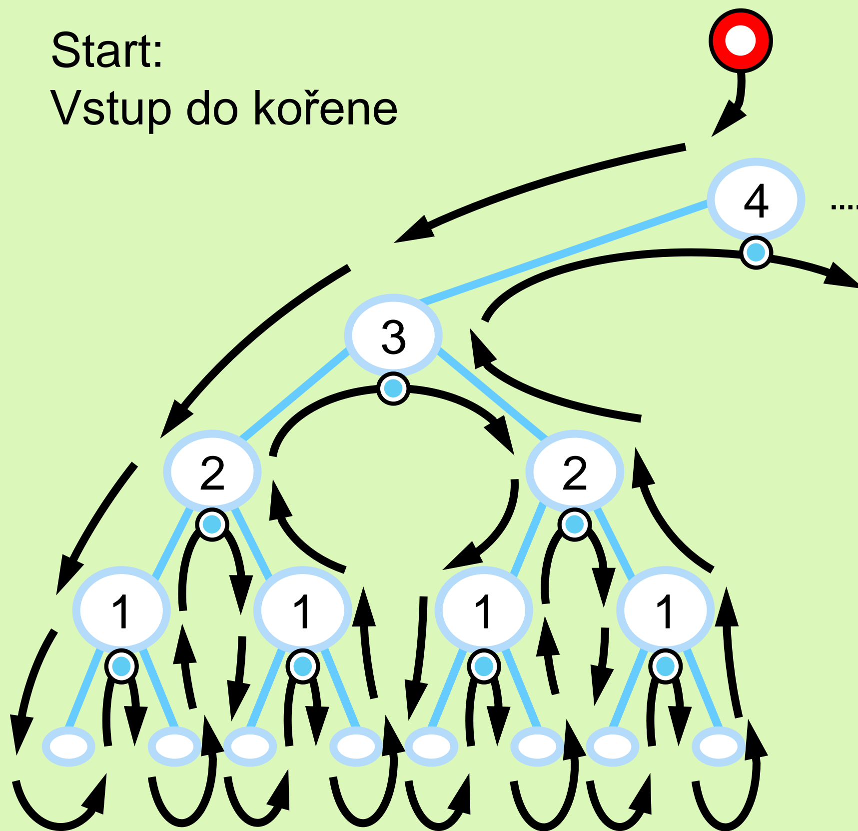
Standardní postup

Ulož první uzel (první zpracovávaný prvek) do zásobníku.
Každý další uzel (zpracovávaný prvek) ulož také na zásobník.
Zpracovávej vždy pouze uzel na vrcholu zásobníku.
Když jsi s uzlem (prvkem) hotov, ze zásobníku ho odstraň.
Skonči, když je zásobník prázdný.

Zásobník implementuje rekurzi

Každý záběr v následující sekvenci předvádí situaci PŘED zpracováním uzlu.

Start:
Vstup do kořene



zásobník

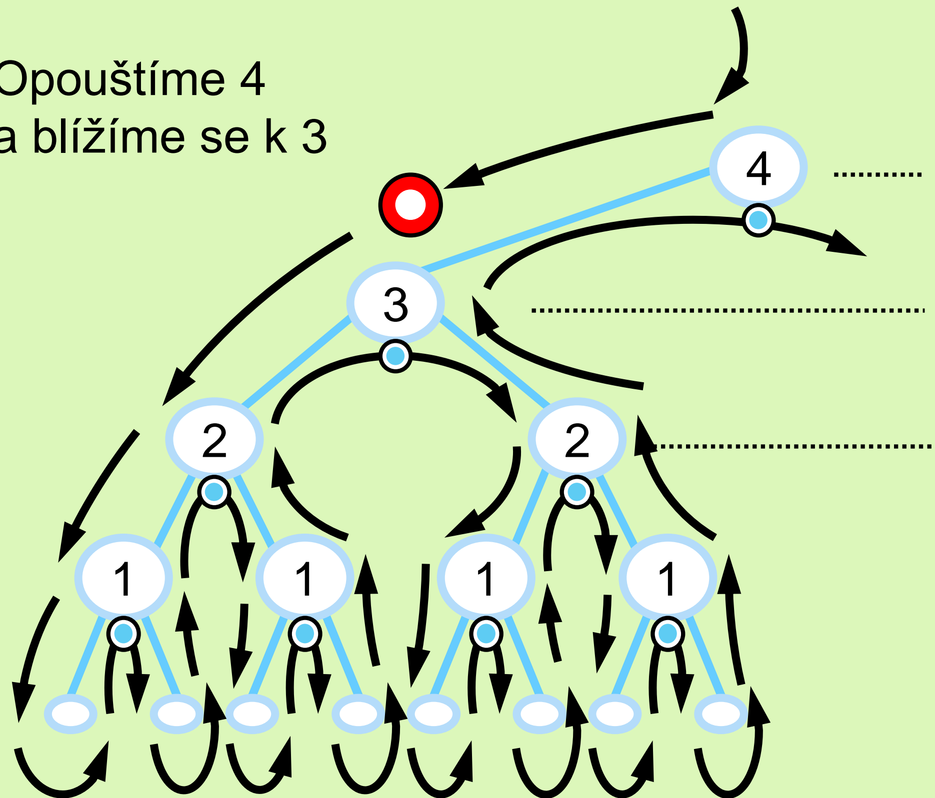
hodnota	návštěv
4	0

push(4,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

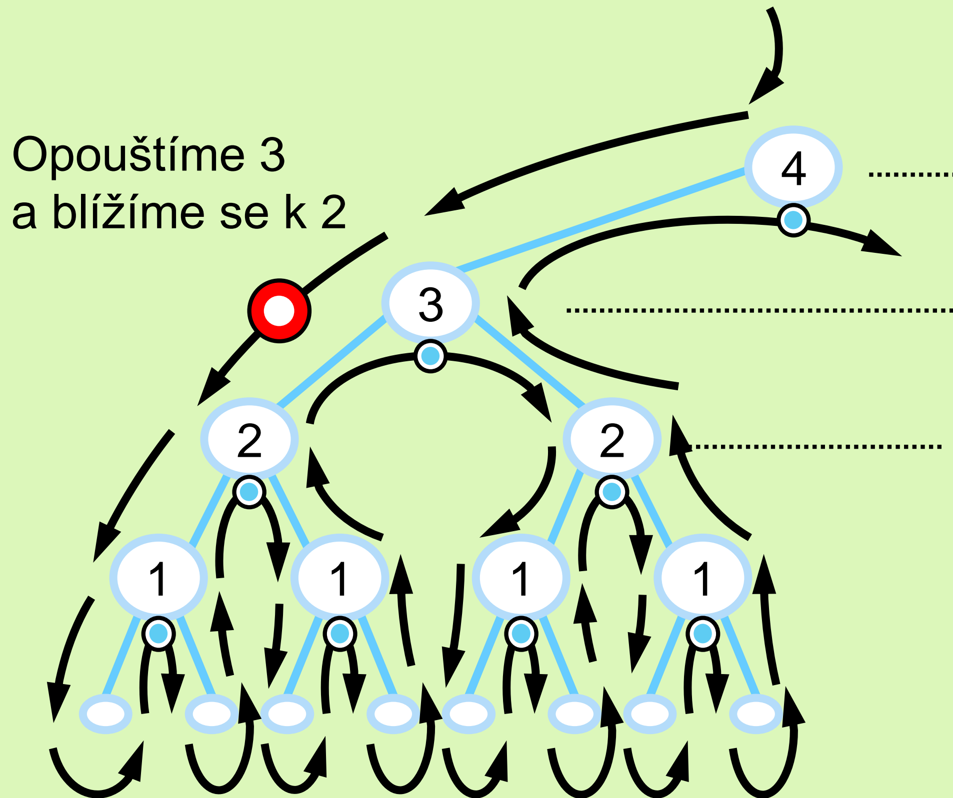
Opouštíme 4
a blížíme se k 3



push(3,0)

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi



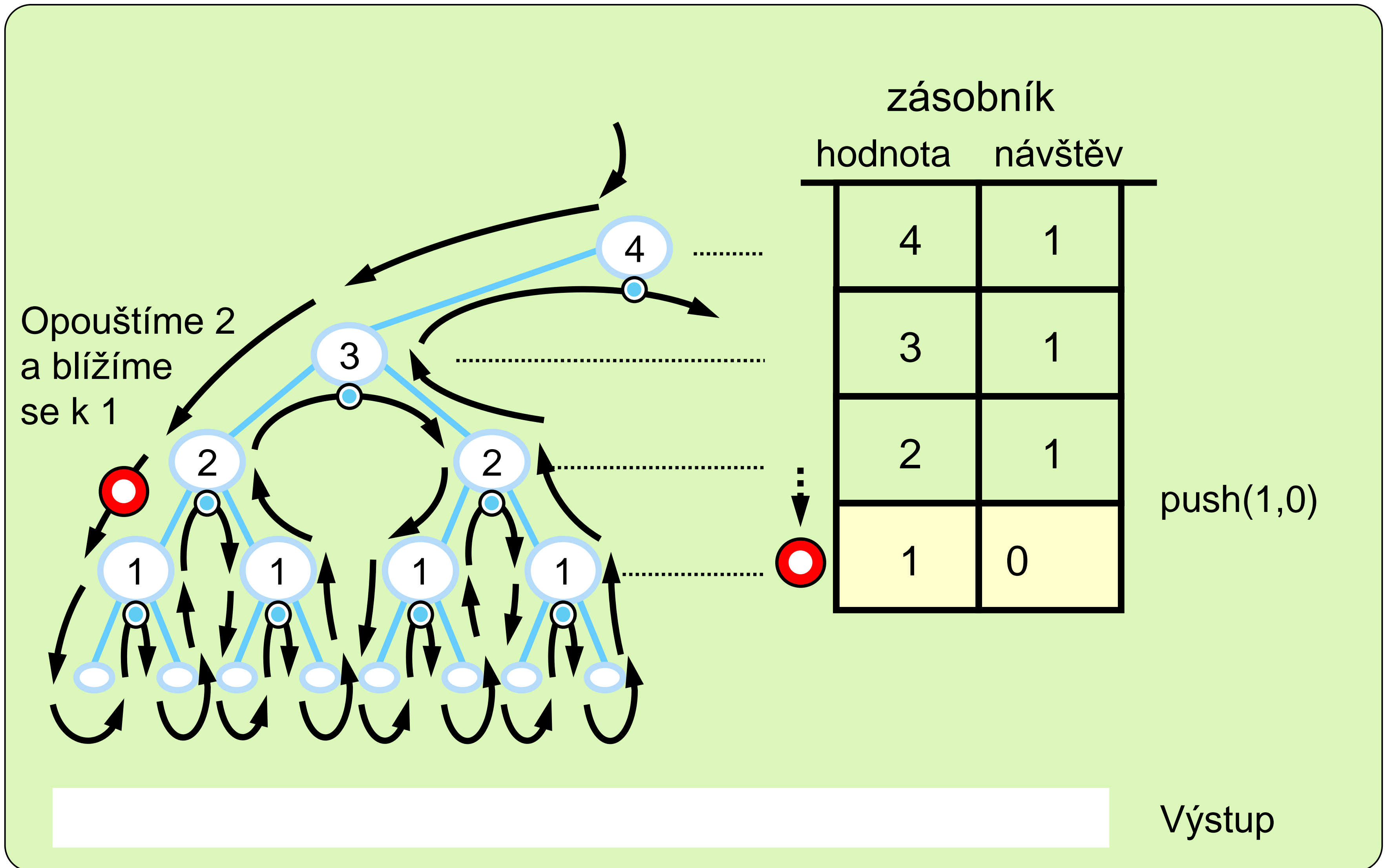
zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	0

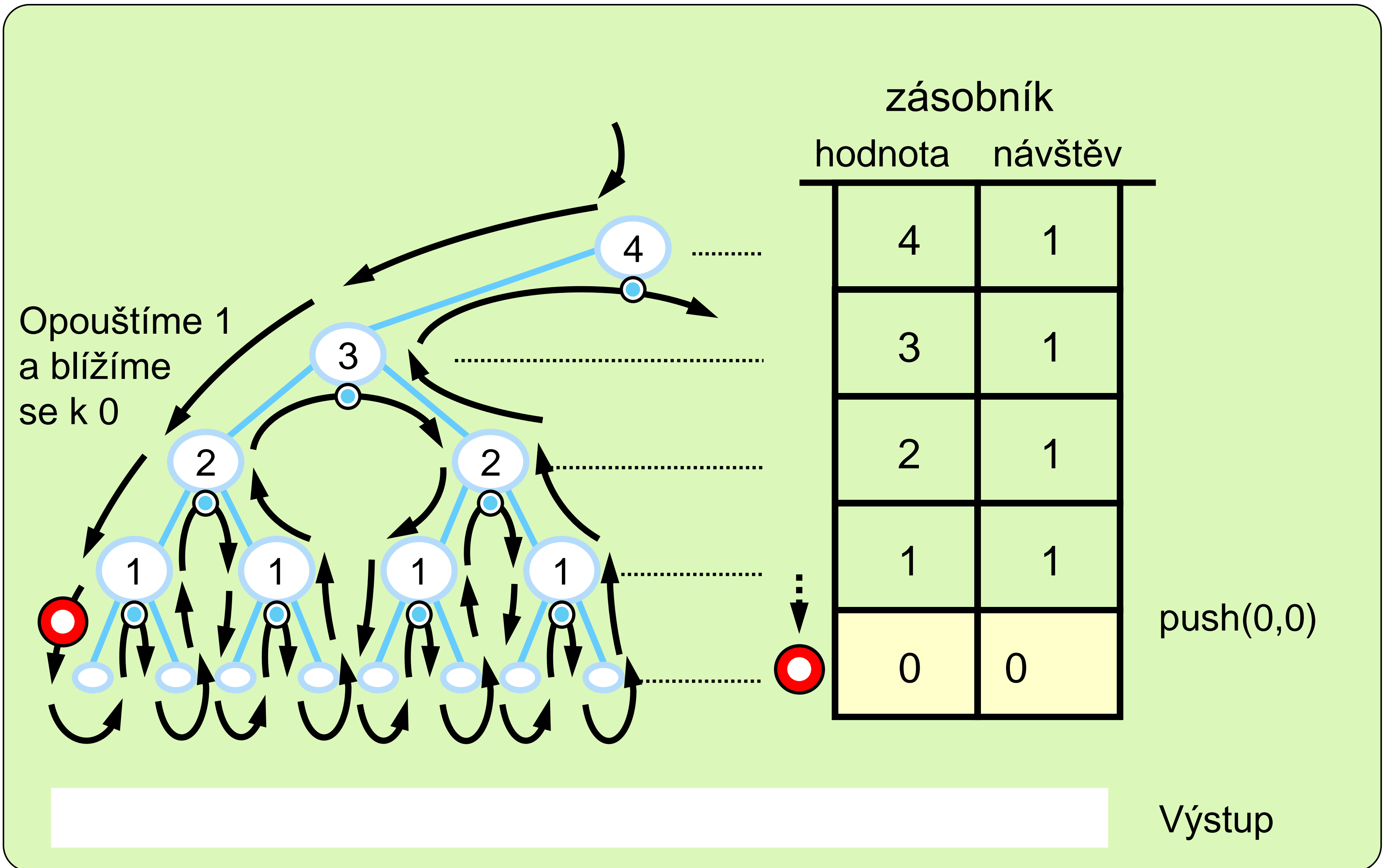
push(2,0)

Výstup

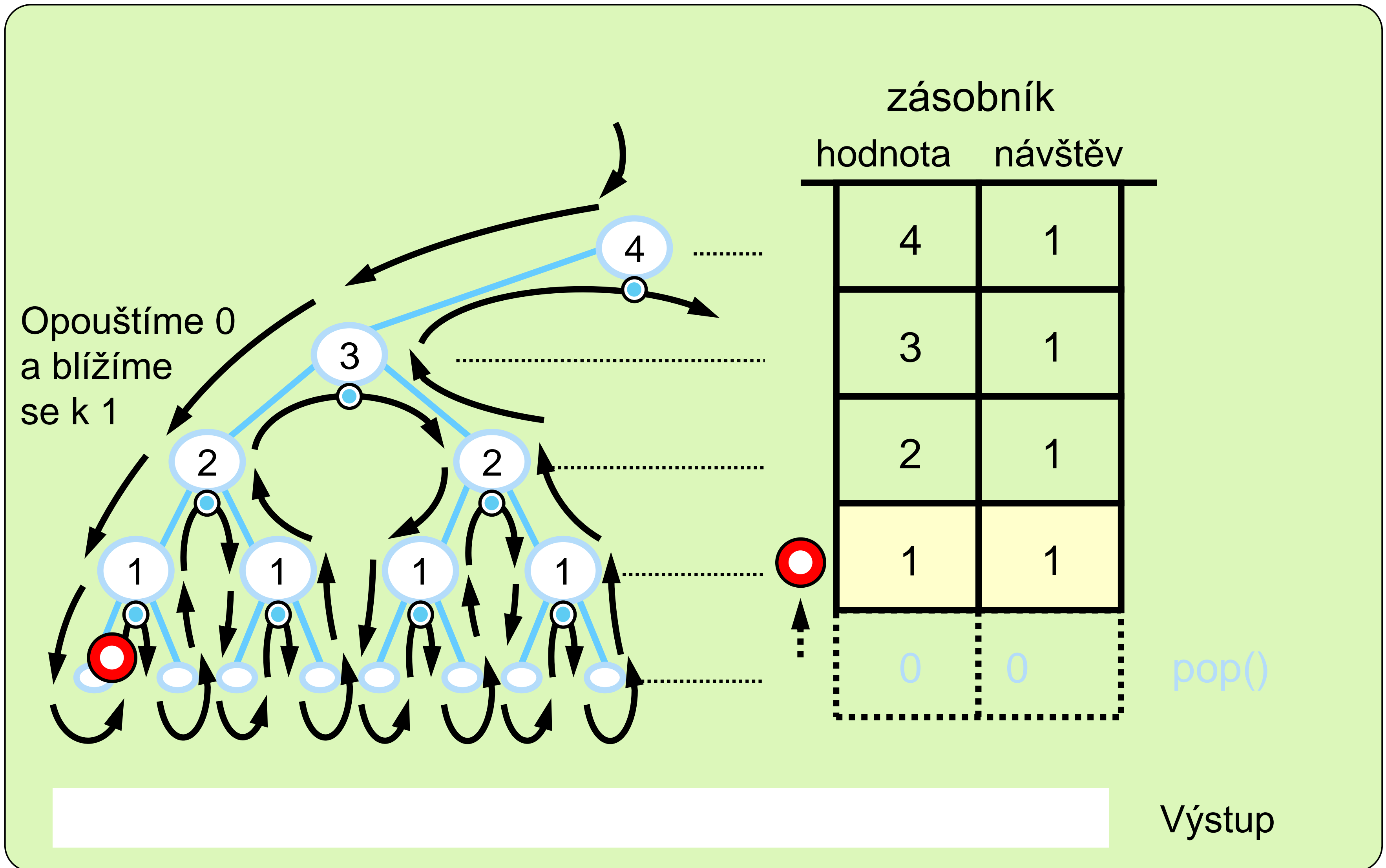
Zásobník implementuje rekurzi



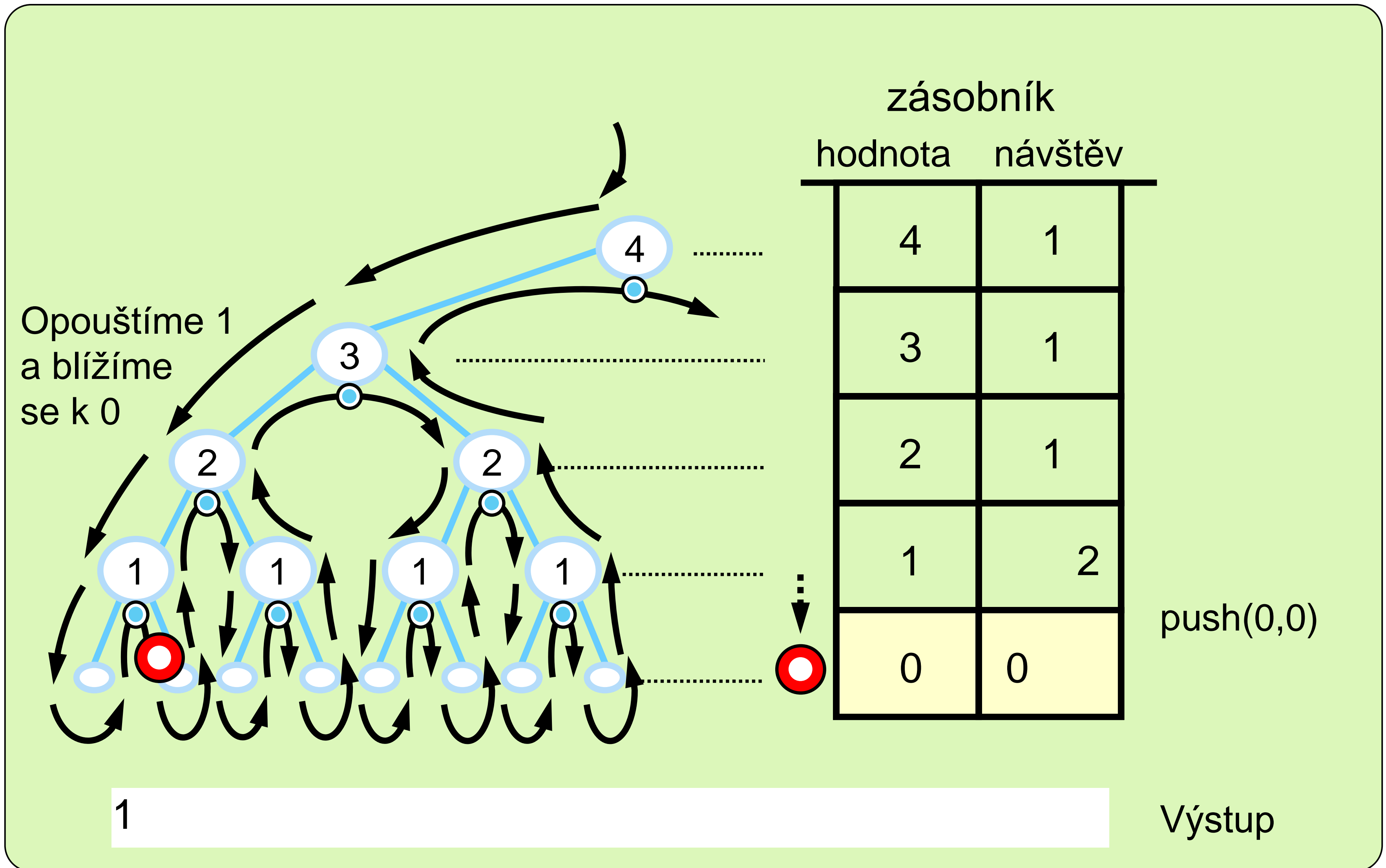
Zásobník implementuje rekurzi



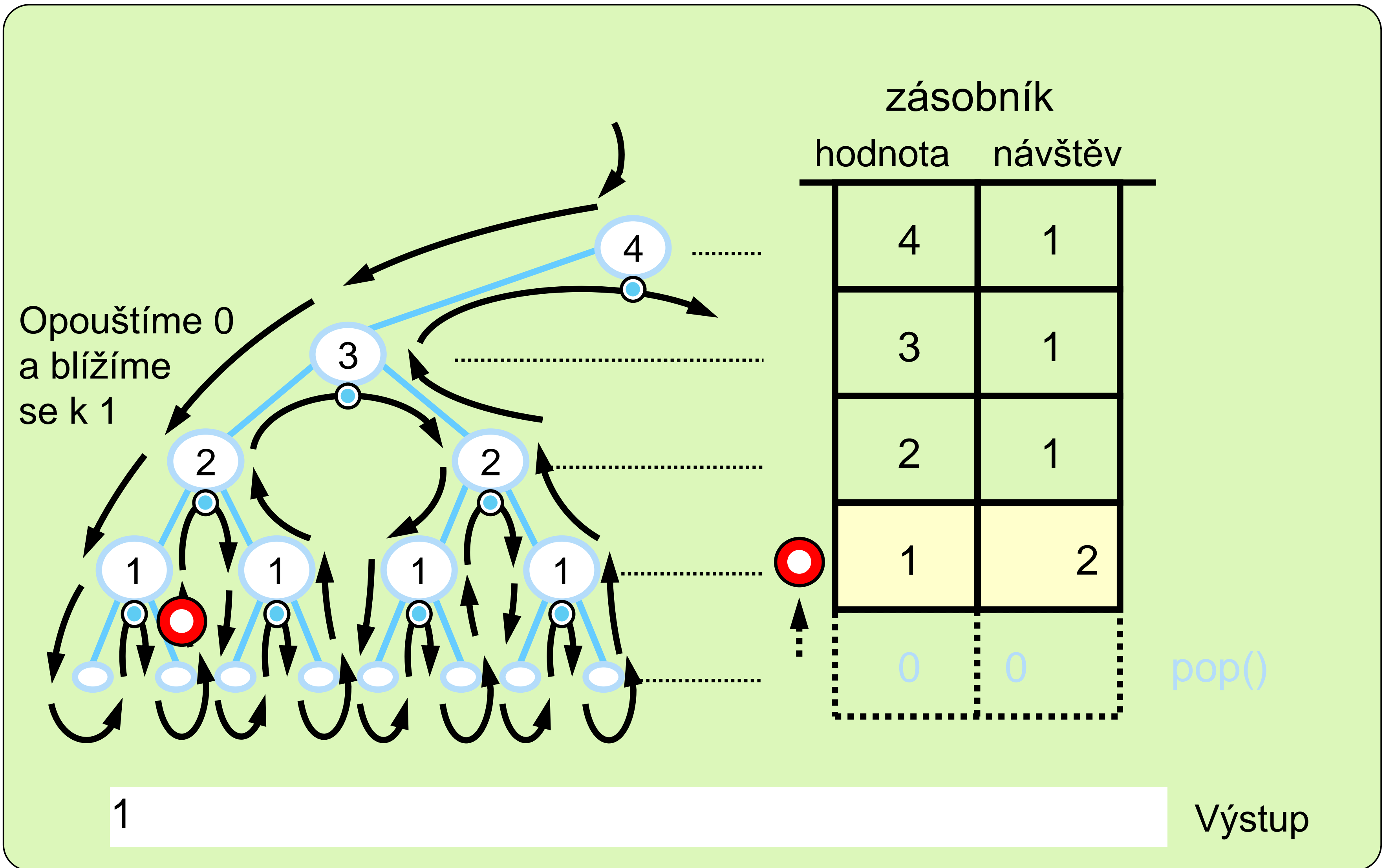
Zásobník implementuje rekurzi



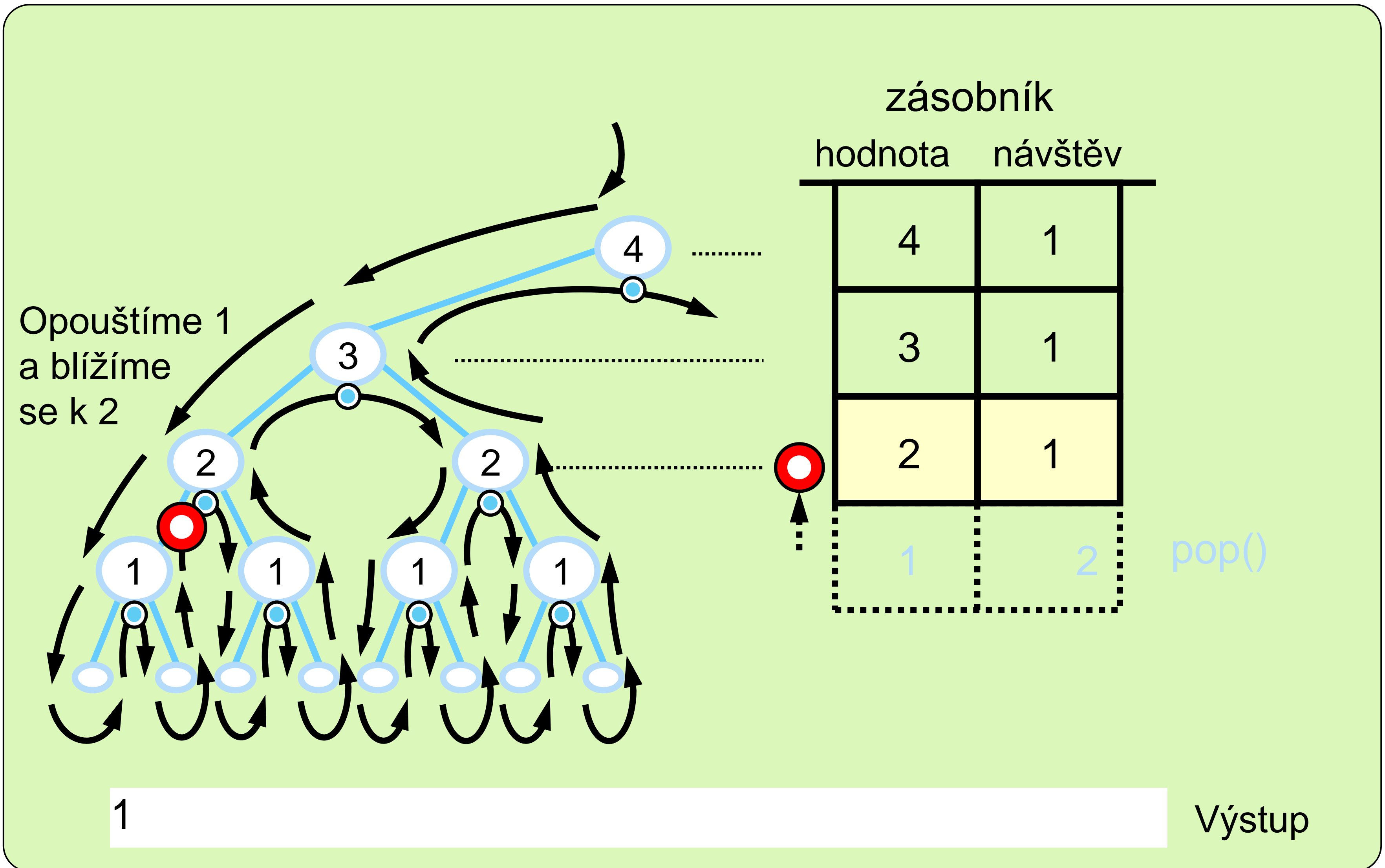
Zásobník implementuje rekurzi



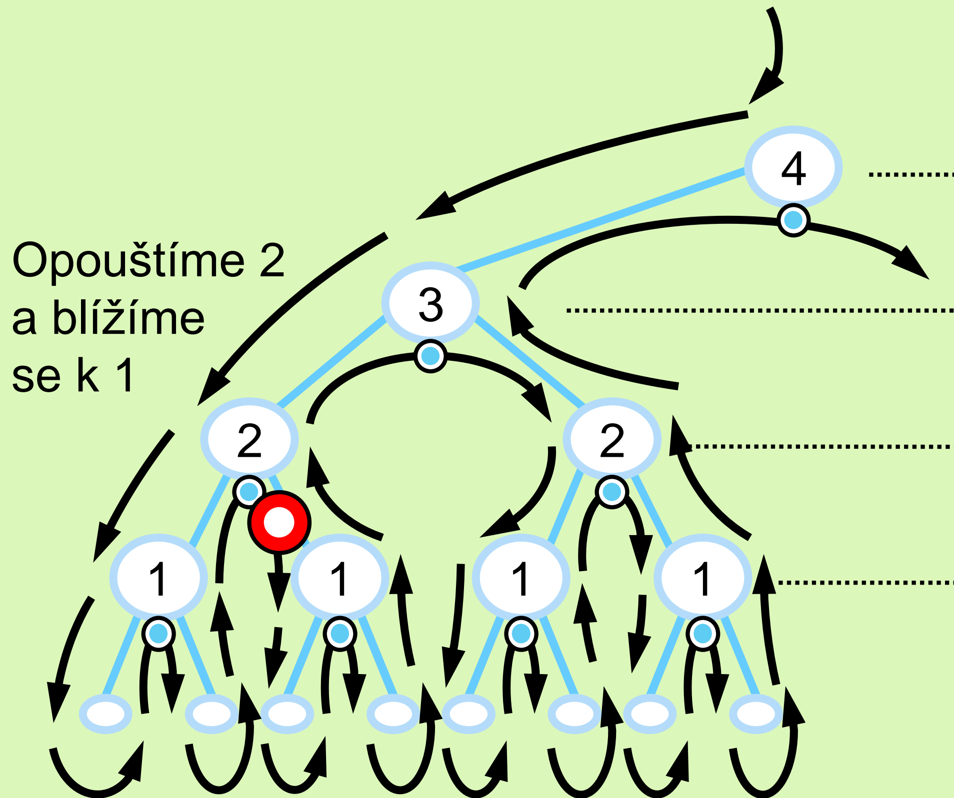
Zásobník implementuje rekurzi



Zásobník implementuje rekurzi



Zásobník implementuje rekurzi



zásobník

hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	2
1	0

push(1,0)

atd…

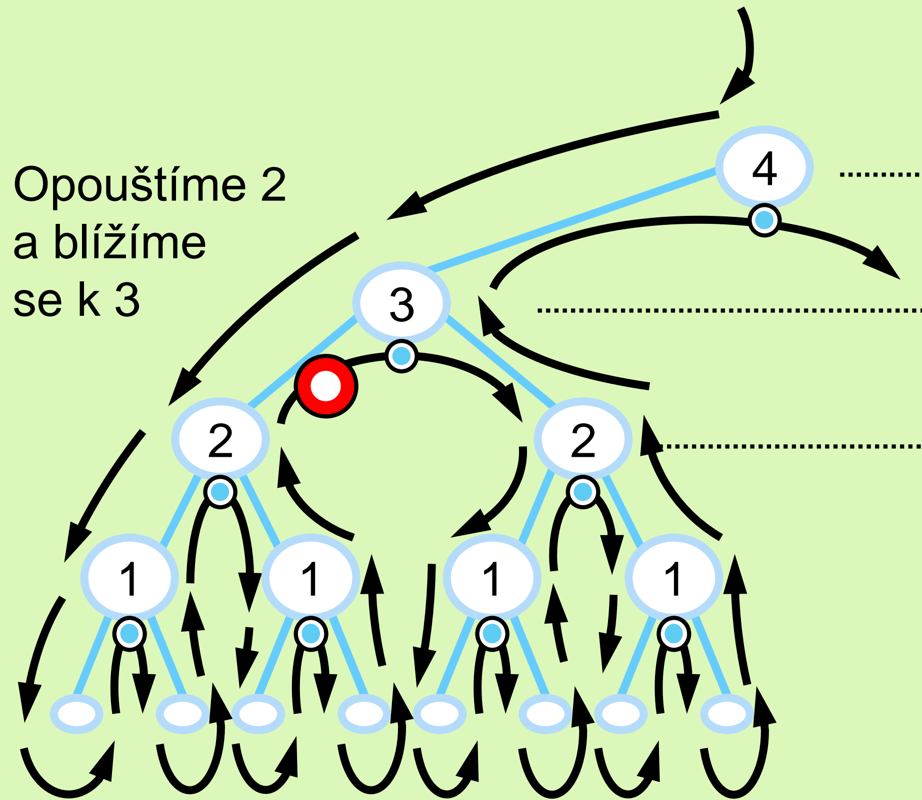
1 2

Výstup

Zásobník implementuje rekurzi

... po chvíli ...

Opouštíme 2
a blížíme
se k 3



zásobník

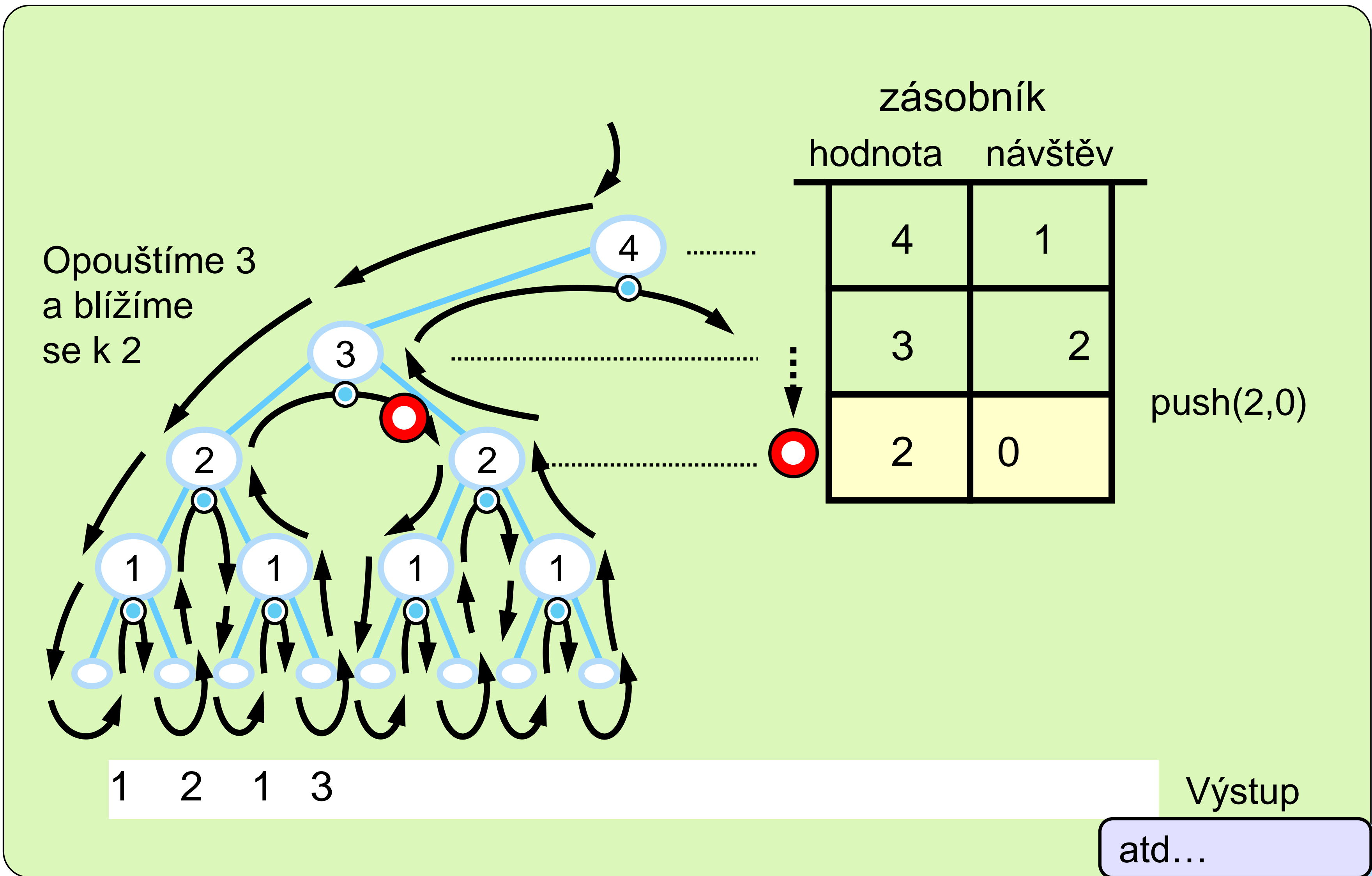
hodnota	návštěv
4	1
3	1
2	2

pop()

1 2 1

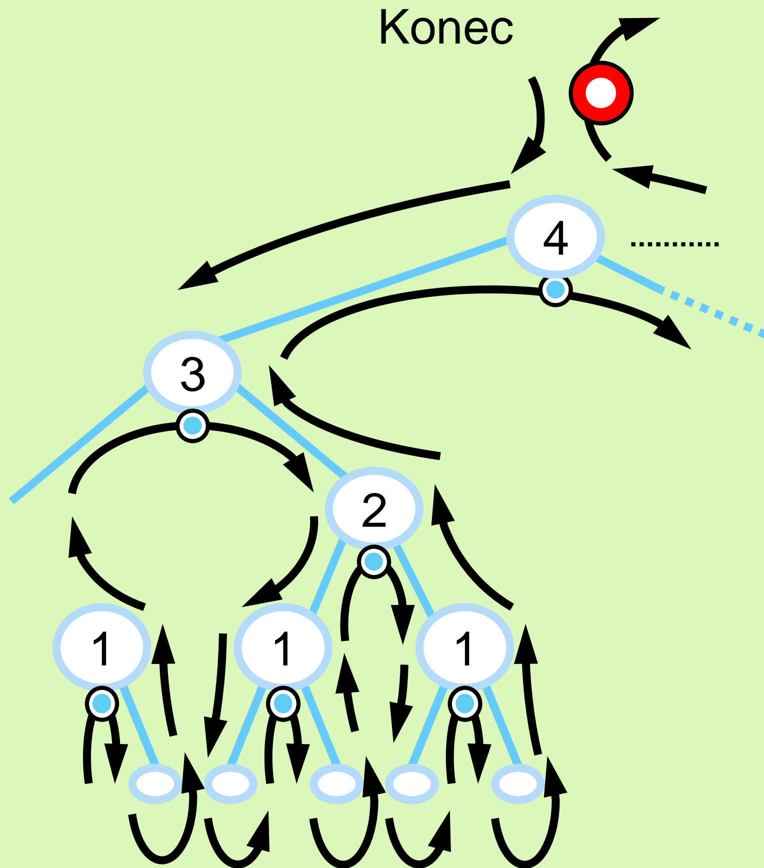
Výstup

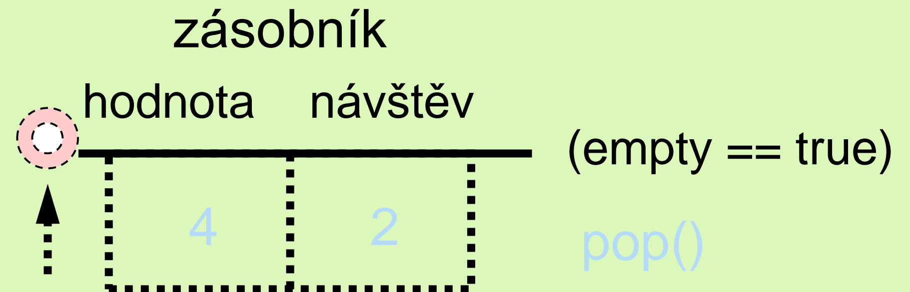
Zásobník implementuje rekurzi



Zásobník implementuje rekurzi

… a je hotovo





1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

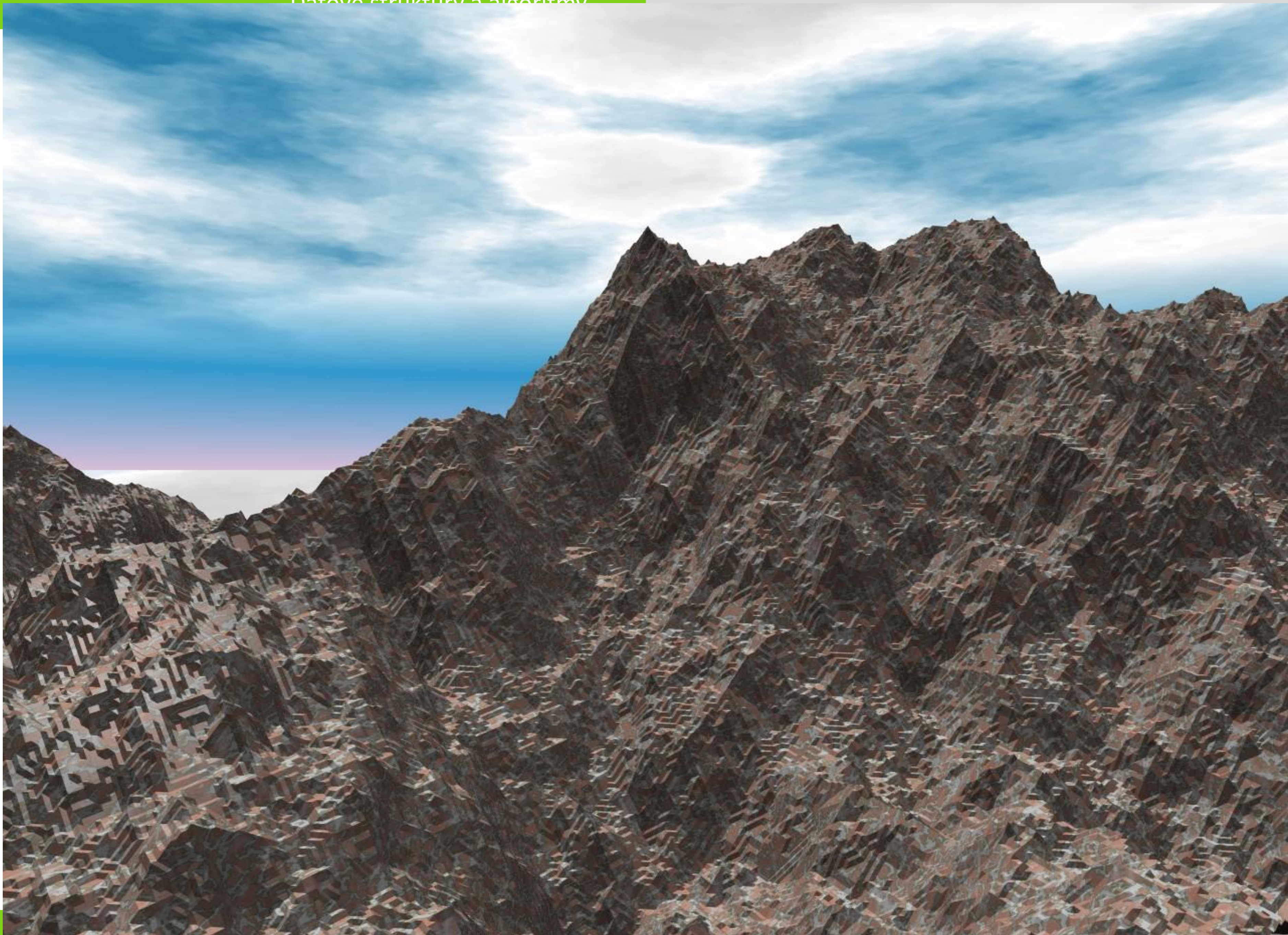
Výstup

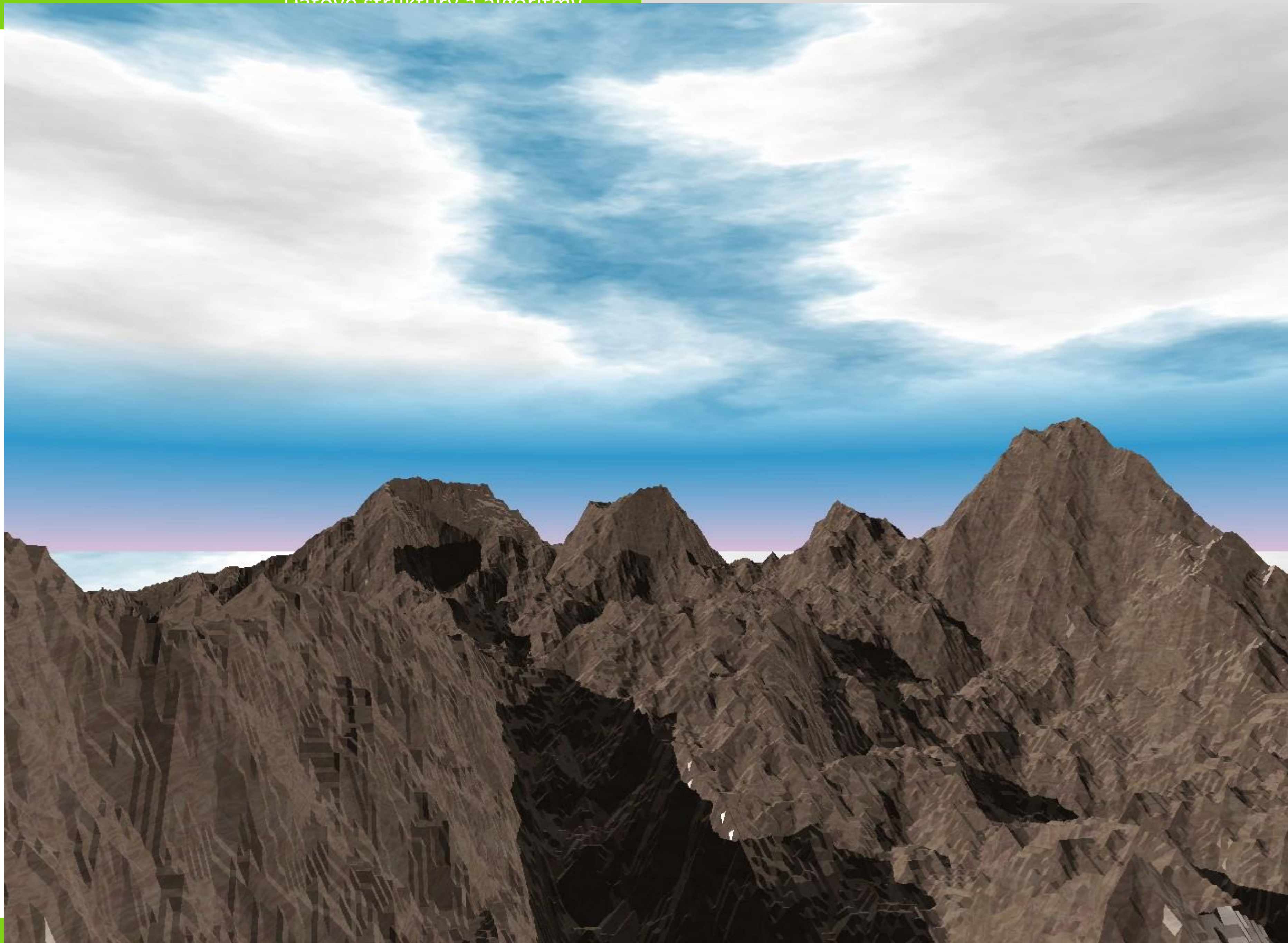
Zásobník implementuje rekurzi

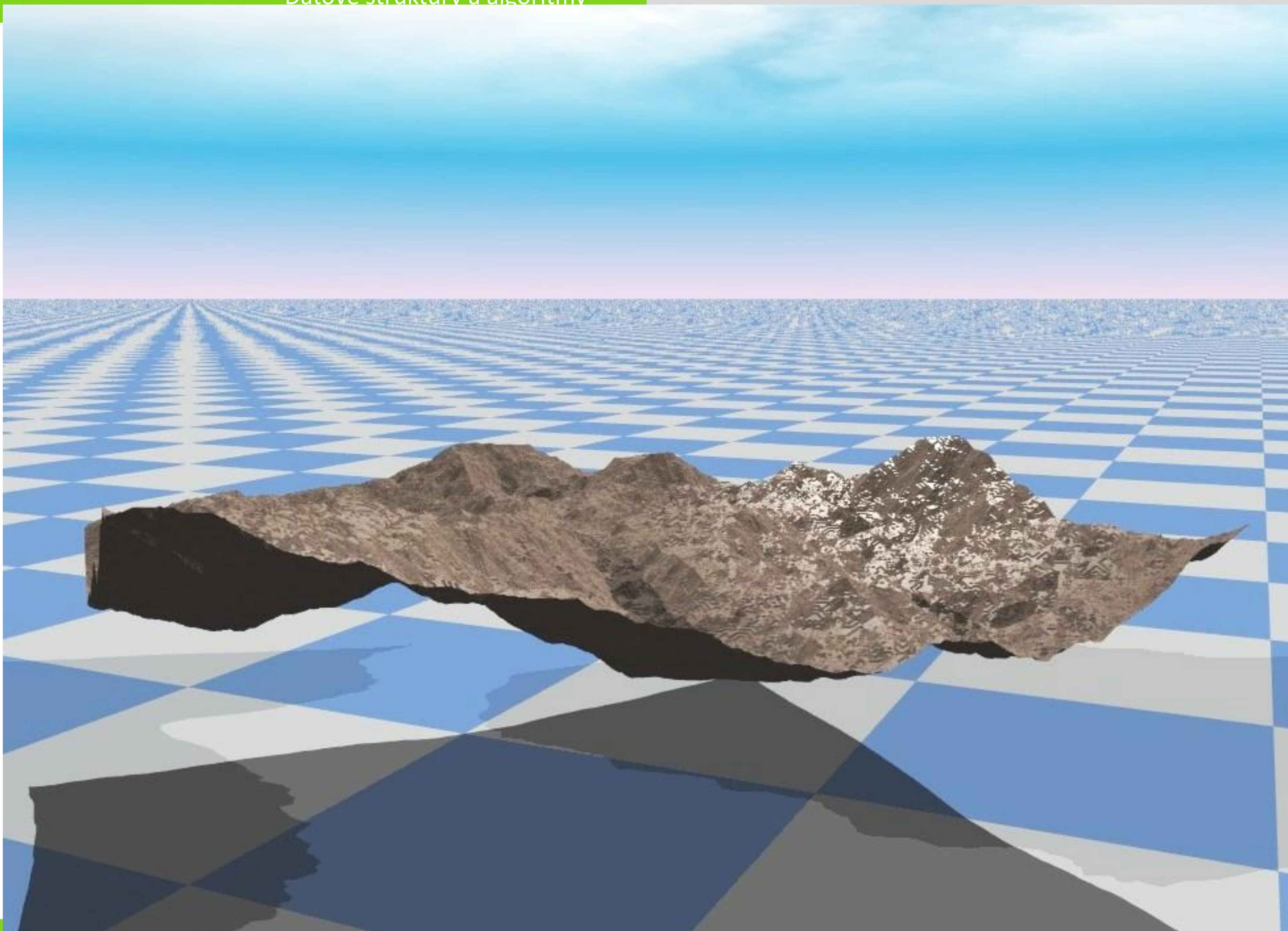
```
// Rekurzivní pravítko bez rekurzivníhop volání
// Pseudokód (skoro kód :-))

while (stack.empty() == false) {
      if (stack.top.hodnota == 0) stack.pop();
      if (stack.top.navstev == 0) {
           stack.top.navstev++;
           stack.push(stack.top.hodnota-1,0);
           }
      if (stack.top.navstev == 1) {
           print(stack.top.hodnota);
           stack.top.navstev++;
           stack.push(stack.top.hodnota-1,0);
           }
      if (stack.top.navstev==2) stack.pop();
}
```

Zásobník implementuje rekurzi

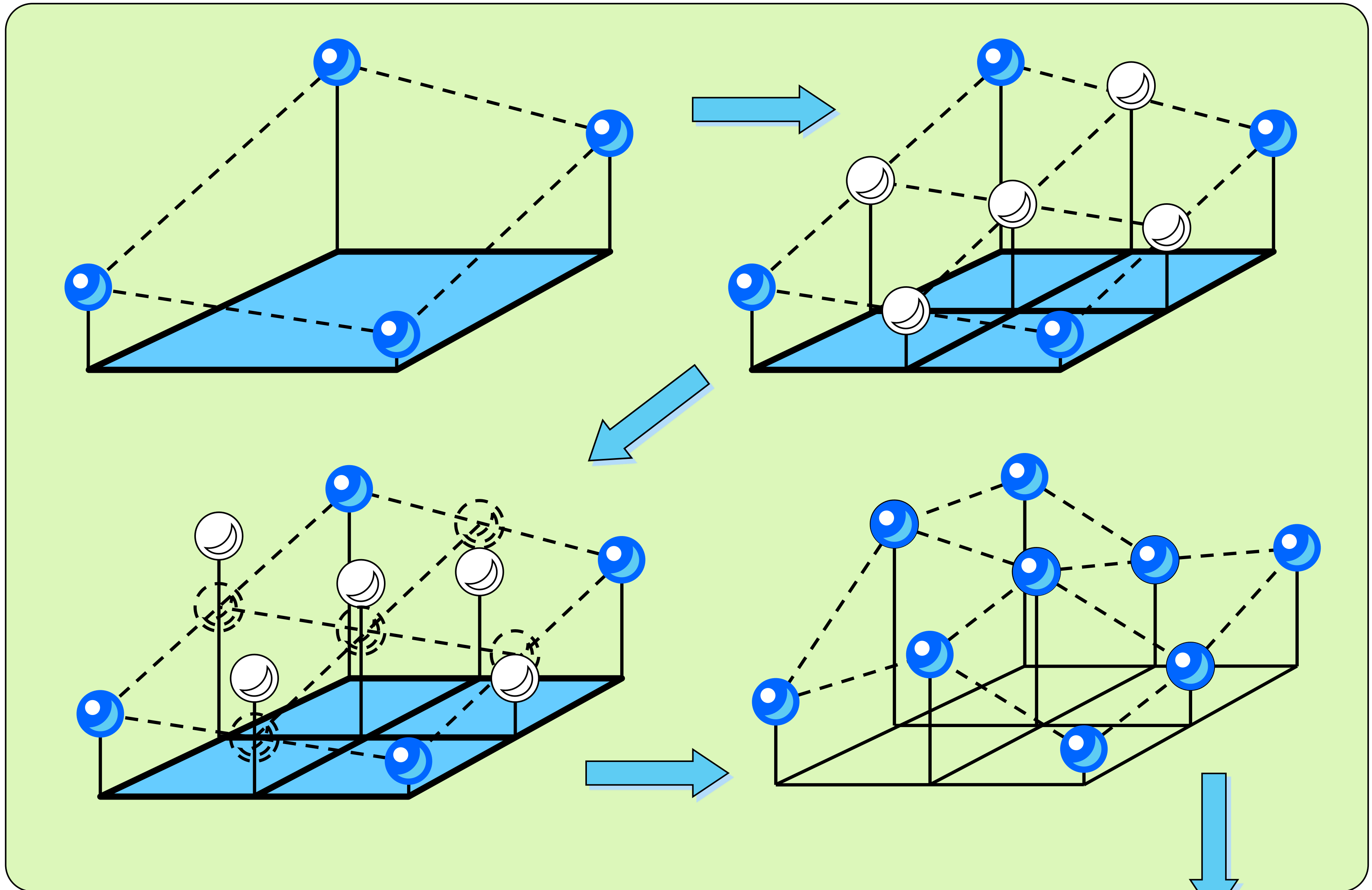
```
int zasHodn[10];  int zasNavst[10];  int SP;
                                    // SP = Stack Pointer
void ruler2() {
  while (SP >= 0) {
    if (zasHodn[SP] == 0) SP--;            // pop
    if (zasNavst[SP] == 0) {               // první návštěva
       zasNavst[SP]++; SP++;
       zasHodn[SP] = zasHodn[SP-1]-1;      // jdi doleva
       zasNavst[SP] = 0;
    }
    if (zasNavst[SP] == 1) {               // druhá návštěva
       printf("%d%s", zasHodn[SP], " ");// zpracuj uzel
       zasNavst[SP]++; SP++;
       zasHodn[SP] = zasHodn[SP-1]-1;      // jdi dopreva
       zasNavst[SP] = 0;
    }
    if (zasNavst[SP] == 2) SP --;          // pop: uzel hotov
} }
```



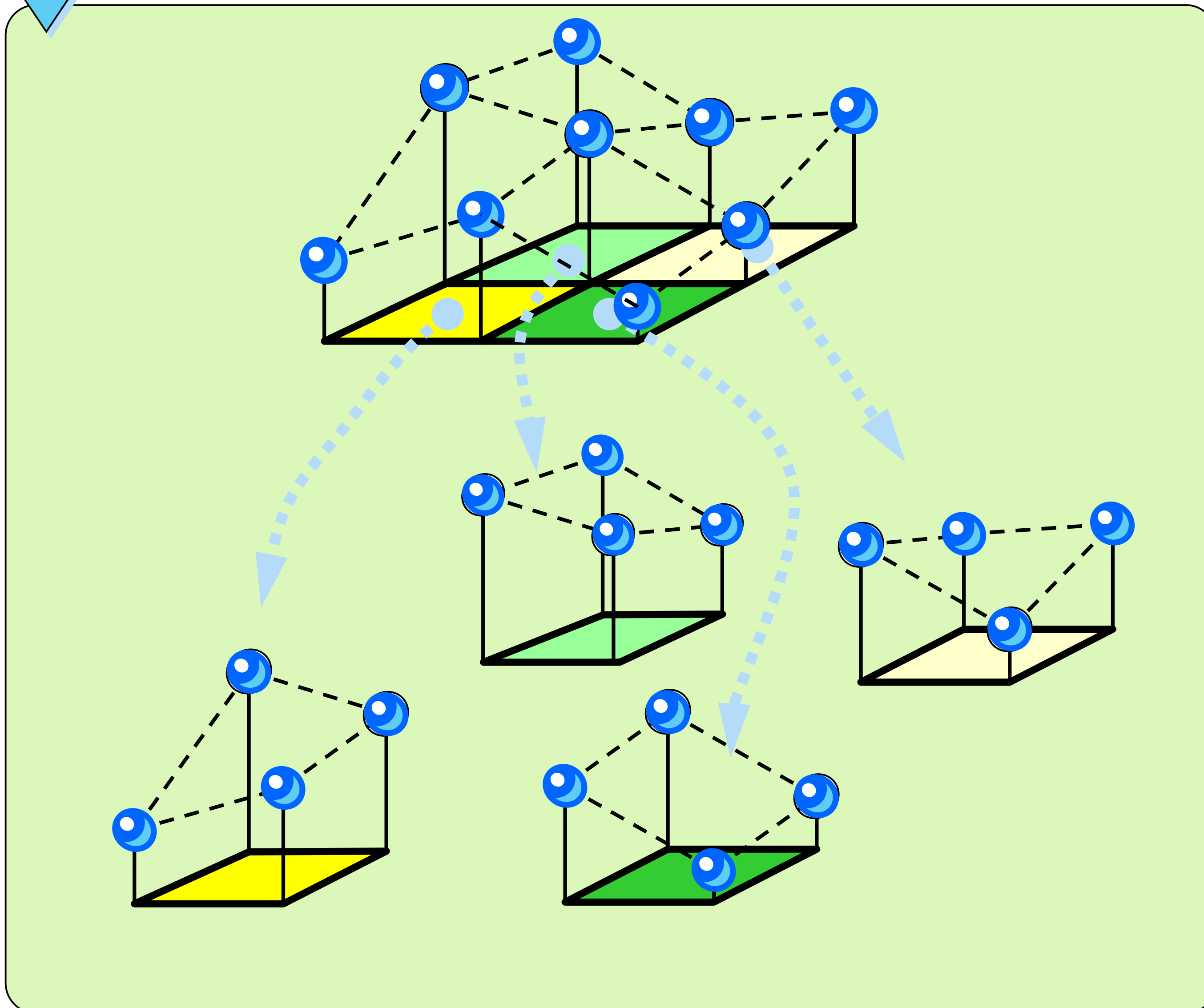




Rekurzivně definovaný terén

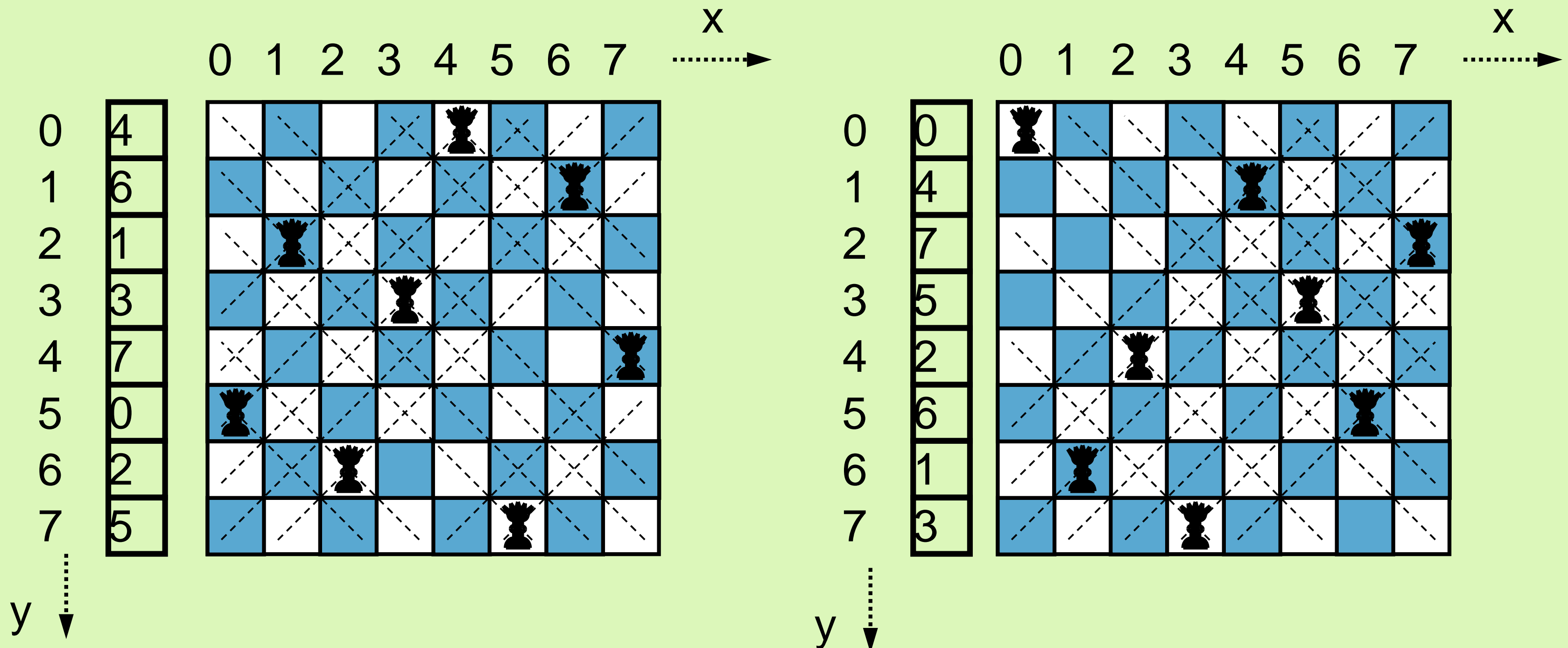


Rekurzivně definovaný terén

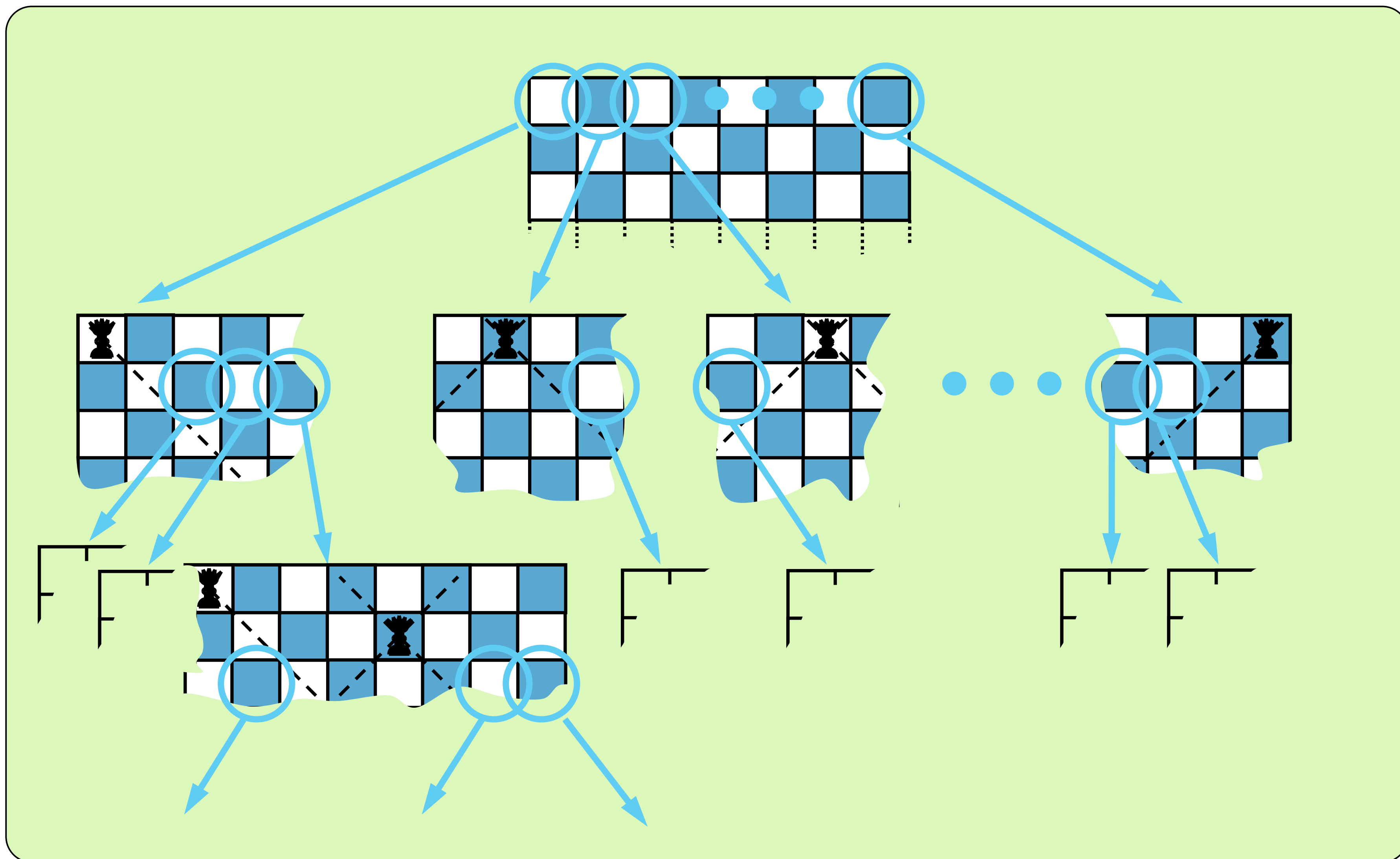


Snadné prohledávání s návratem (backtrack)

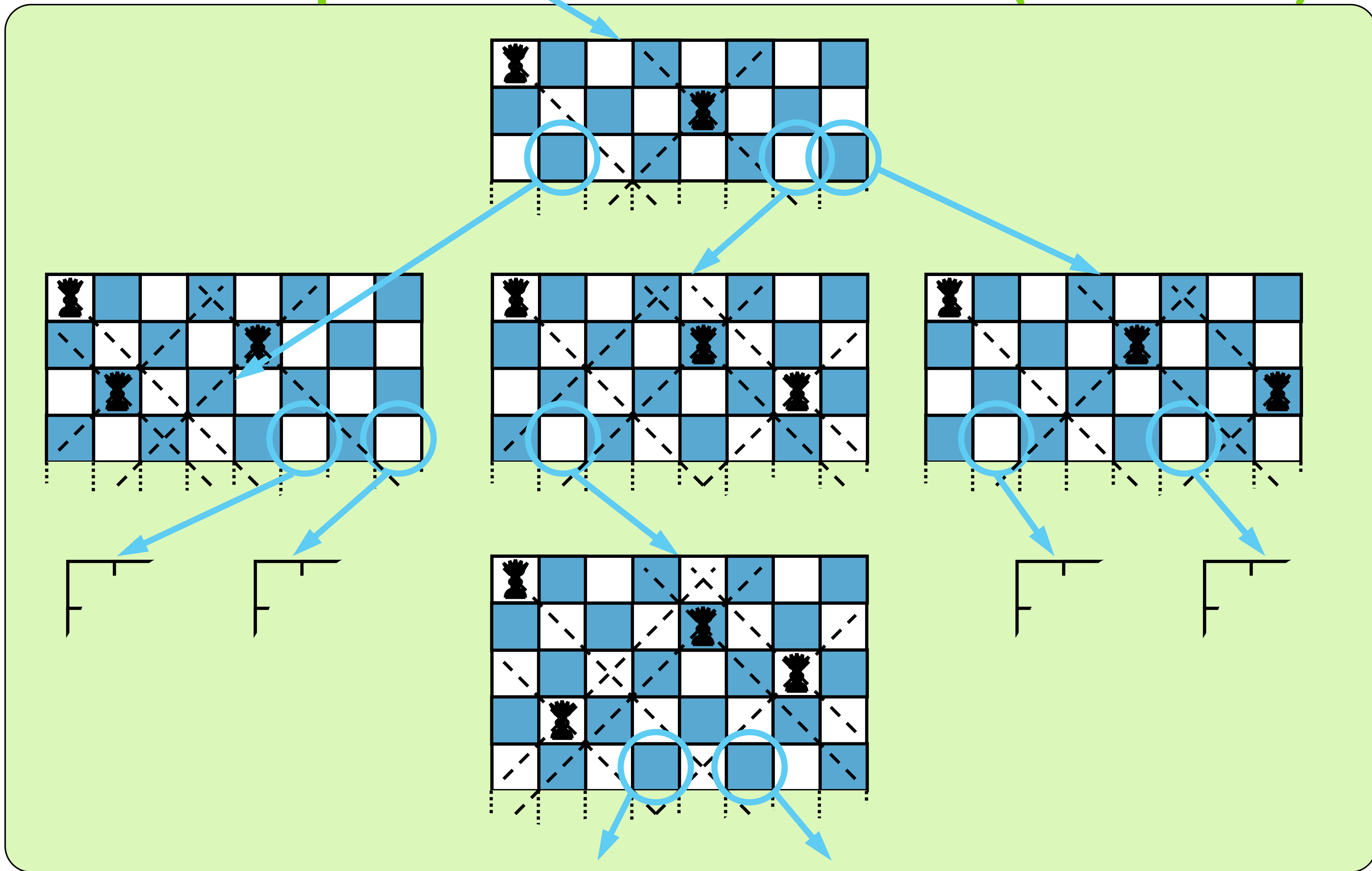
Problém osmi dam na šachovnici



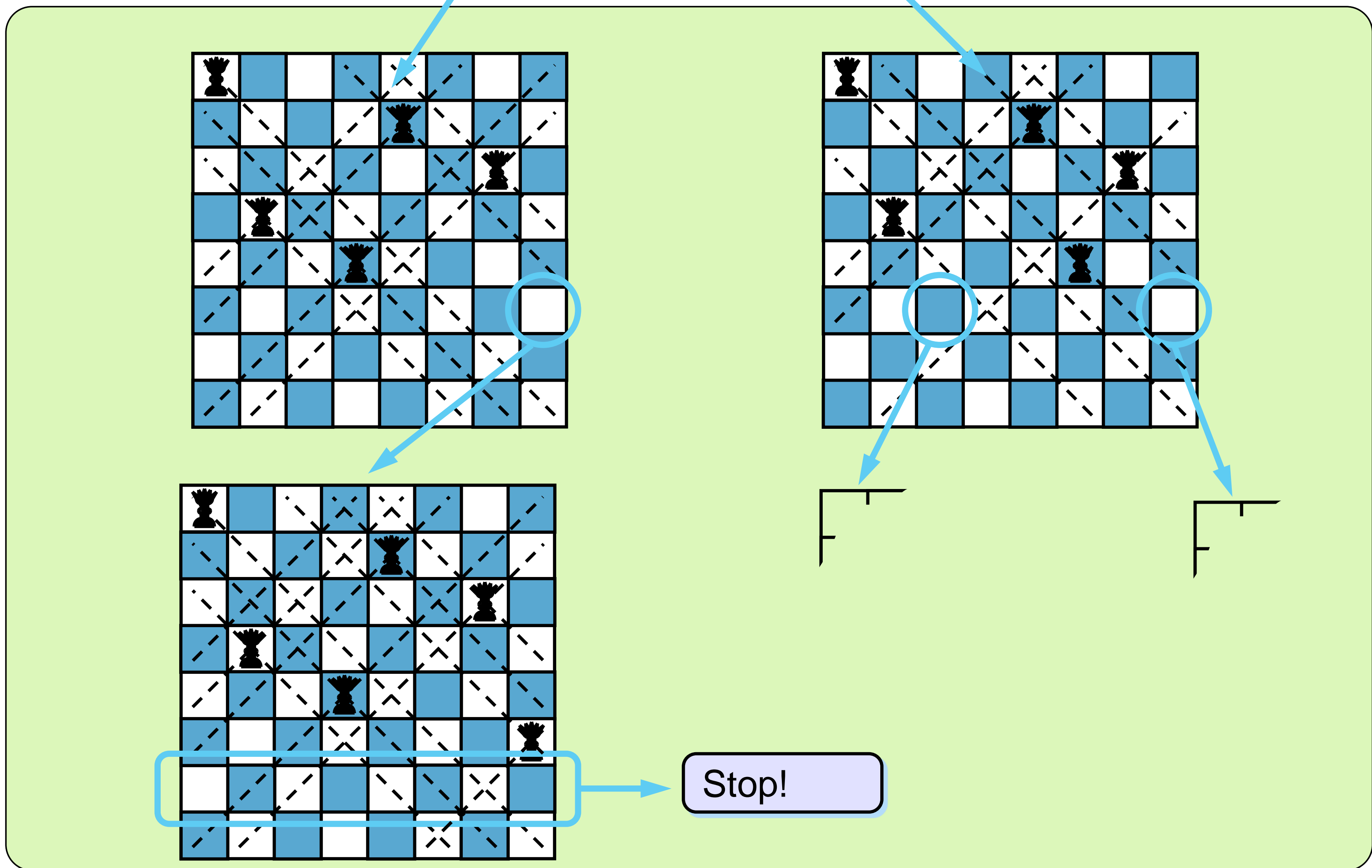
Snadné prohledávání s návratem (backtrack)



Snadné prohledávání s návratem (backtrack)



Snadné prohledávání s návratem (backtrack)



Snadné prohledávání s návratem (backtrack)

N	Počet řešení	Počet testovaných pozic dámy		Zrychlení
		Hrubá síla (N^N)	Backtrack	
4	**2**	**256**	**240**	**1.07**
5	**10**	**3 125**	**1 100**	**2.84**
6	**4**	**46 656**	**5 364**	**8.70**
7	**40**	**823 543**	**25 088**	**32.83**
8	**92**	**16 777 216**	**125 760**	**133.41**
9	**352**	**387 420 489**	**651 402**	**594.75**
10	**724**	**10 000 000 000**	**3 481 500**	**2 872.33**
11	**2 680**	**285 311 670 611**	**19 873 766**	**14 356.20**
12	**14 200**	**8 916 100 448 256**	**121 246 416**	**73 537.00**

Tab.: Rychlosti řešení problému osmi dam

Snadné prohledávání s návratem (backtrack)

```
bool posOK( int x, int y) {
   int i;
   for (i = 0; i < x; i++)
     if ((xPosArr[i] == y) ||                     // stejná řada
         (abs(x-i) == abs(xPosArr[i]-y) )) // nebo diagonála
       return false;
   return true;
}
void tryPutColumn(int y) {
   int x;
   if (y >= N ) print_yPosArr();             // řešení
   else
     for (x = 0; x < N; x++)                 // testuj sloupce
         if (posOK(y, x) == true) {          // když je volno,
           xPosArr[y] = x;                   // dej tam dámu
           tryPutColumn(y + 1);              // a volej rekurzi
 }       }

Call: tryPutColumn(0);
```

Salvador Dalí Tvář války (1940-1941)

The End