

Dynamické programování

Karel Richta a kol.

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

© Karel Richta a kol., 2021

Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
02/2021, Lekce 12

<https://moodle.fel.cvut.cz/course/view.php?id=5973>



Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Myšlenka dynamického programování

Definice
funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \ || \ (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1, y) & (x > 0) \ \&\& \ (y > 0) \end{cases}$$

Otázka

$f(10,10) = ?$

Program

```
int f(int x, int y) {
    if ( (x == 0) || (y == 0) )
        return 1;
    return (2* f(x,y-1) + f(x-1,y));
}
```

```
print( f(10,10) );
```

Odpověď

$f(10,10) = 127\,574\,017$



Myšlenka dynamického programování

Jednoduchá
analýza

```
int count = 0;

public static int f(int x, int y) {
    count++;
    if ( (x == 0) || (y == 0) )
        return 1;
    return (2* f(x, y-1) + f(x-1,y));
}
```

```
xyz = f(10,10);
print(count);
```

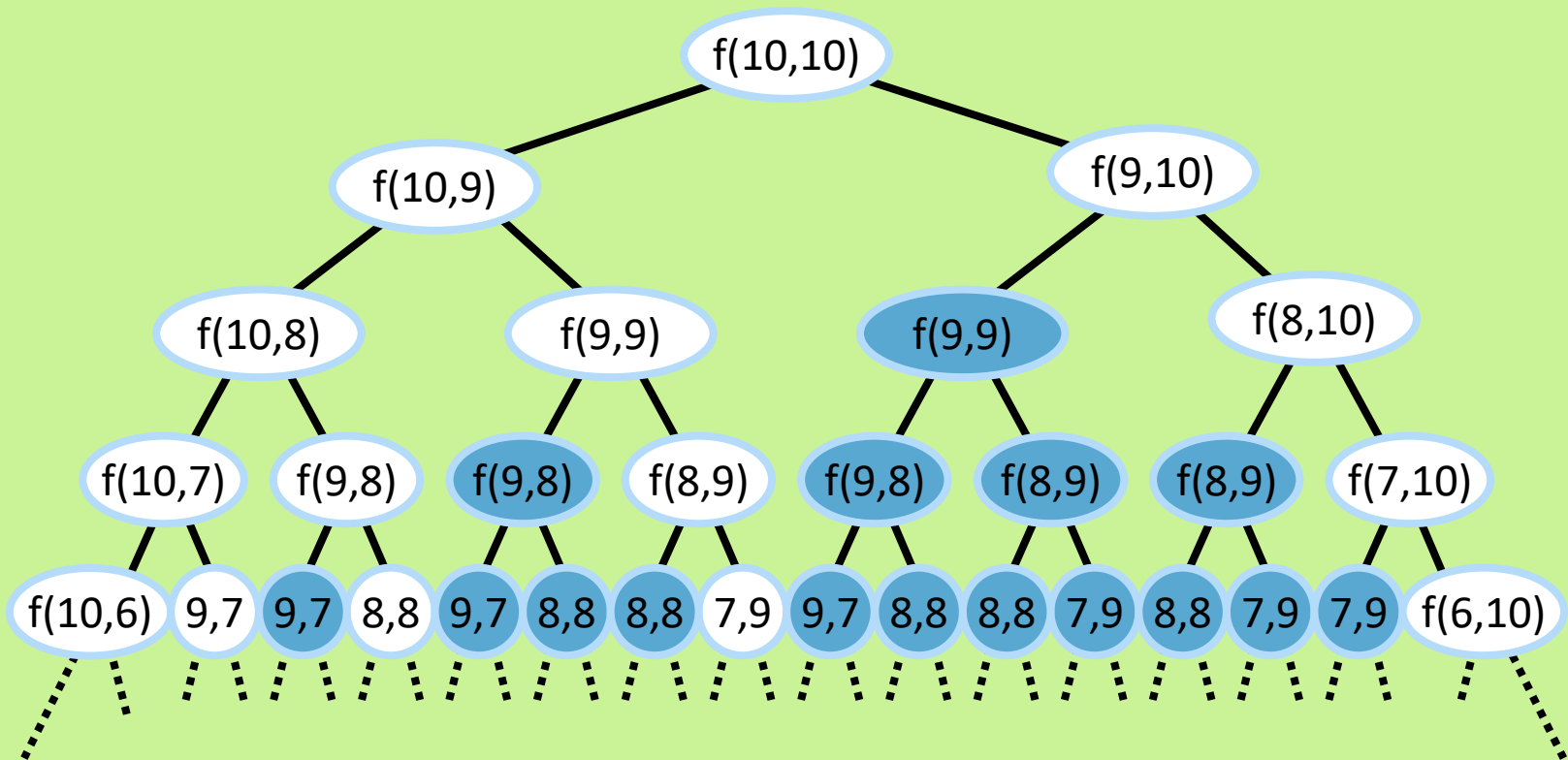
Výsledek
analýzy

count = 369 511



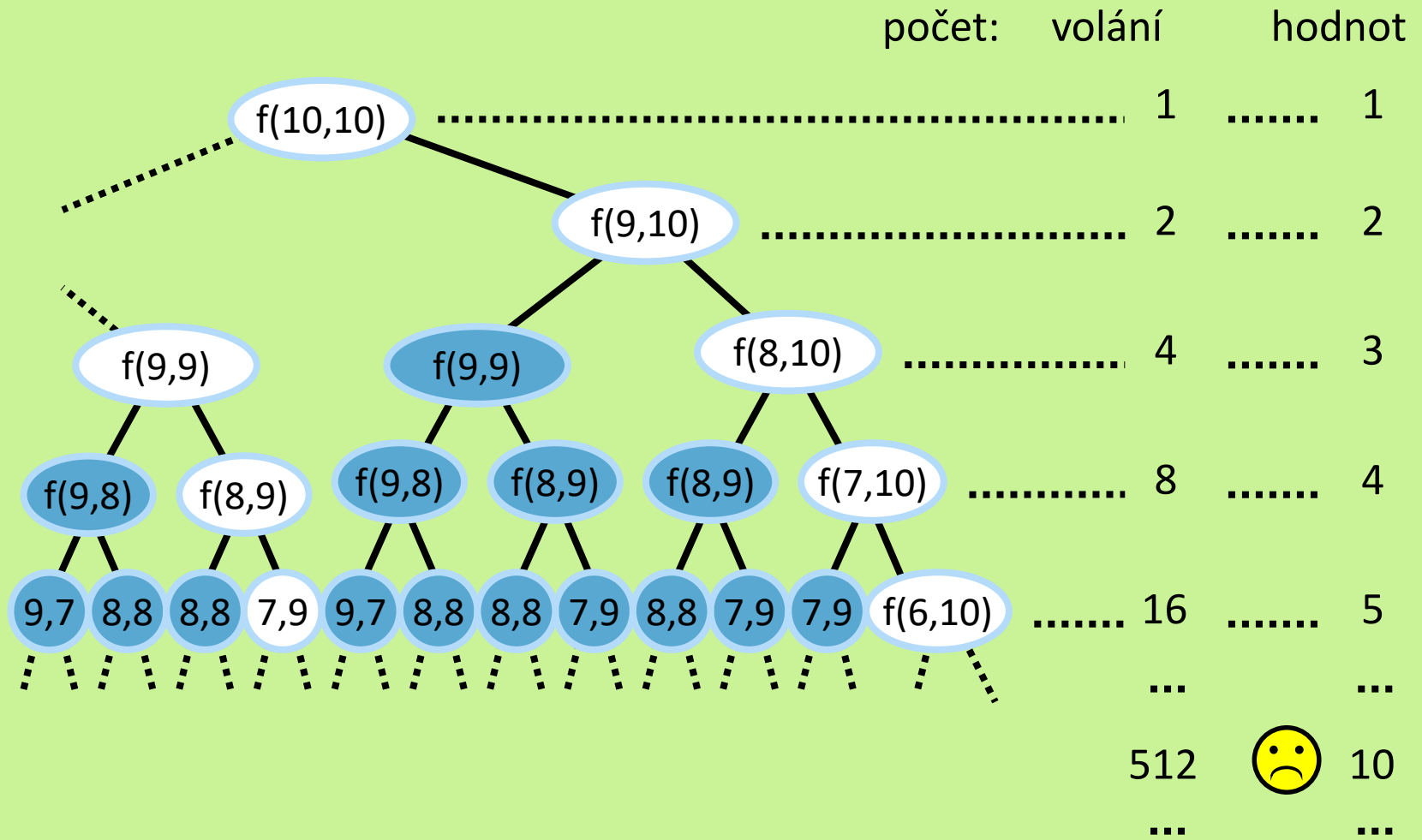
Myšlenka dynamického programování

Detailnější analýza – strom rekurzivního volání



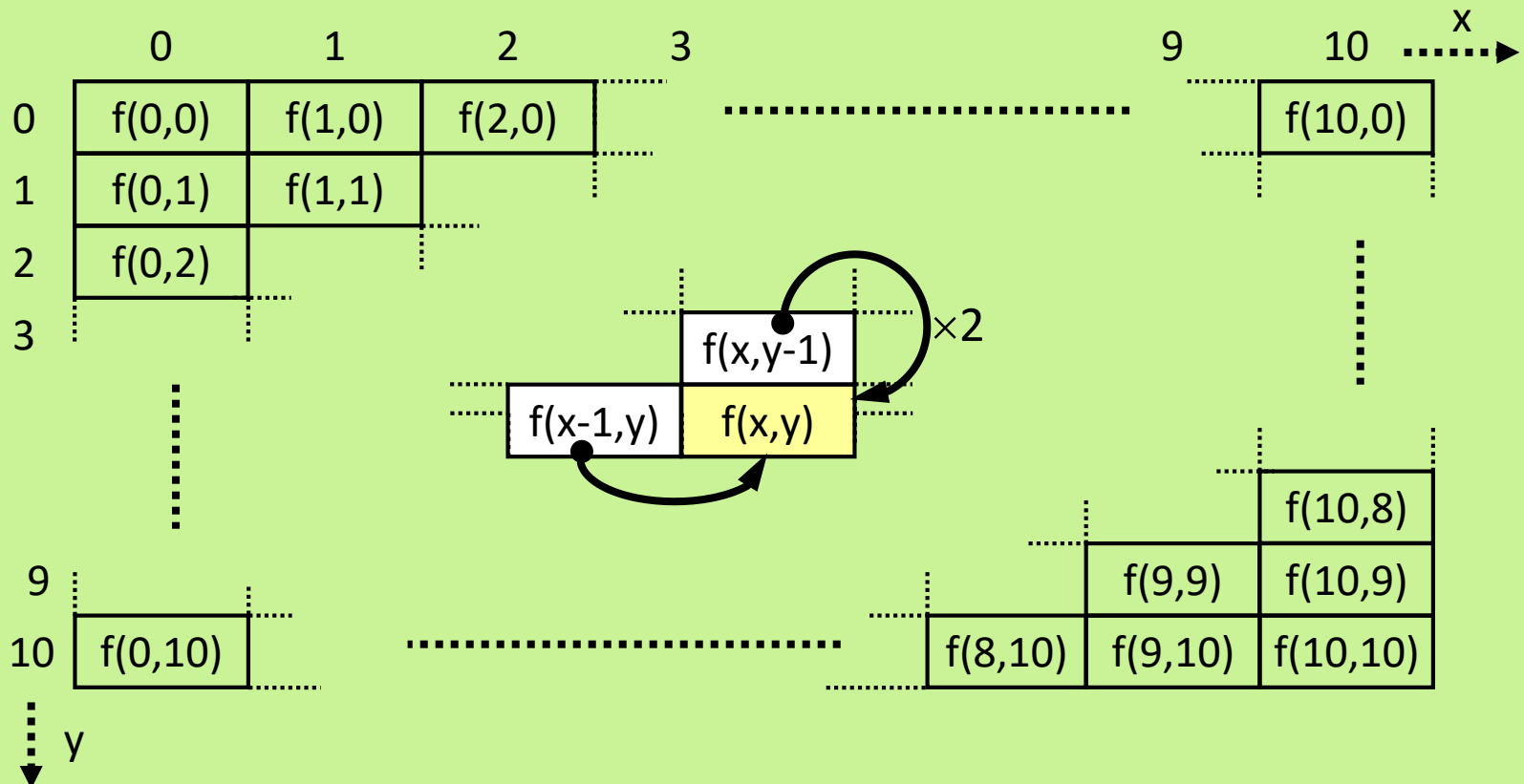
Myšlenka dynamického programování

Detailnější analýza pokračuje – efektivita rekurzivního volání



Myšlenka dynamického programování

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \ || \ (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1, y) & (x > 0) \ \&\& \ (y > 0) \end{cases}$$



Myšlenka dynamického programování

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \ || \ (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1, y) & (x > 0) \ \&\& \ (y > 0) \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	9	10	x →
0	1	1	1	1	1	1	
1	1	3	5	7	9			
2	1	7	17	31				
3	1	15	49					
4	1	31						
	⋮							
9								
10	1				28000257	61616127	127574017
							8085505	
							16807935	32978945

Myšlenka dynamického programování

Všechny hodnoty se předpočítají

```
static int dynArr [N+1][N+1];

void fillDynArr() {
    int xy, x, y;
    for (xy = 0; xy <= N; xy++)
        dynArr[0][xy] = dynArr[xy][0] = 1;

    for (y = 1; y <= N; y++)
        for (x = 1; x <= N; x++)
            dynArr[y][x] = 2*dynArr[y-1][x] + dynArr[y][x-1];
}
```

Volání funkce

```
int f(int x,int y) {
    return dynArr[y][x];
}
```


Rozděl-a-panuj vs. dynamické programování

- Metoda **rozděl-a-panuj** je vhodná pro řešení úloh, které lze rozdělit na **nezávislé podúlohy**:
 - Rozděl úlohu na nezávislé podúlohy.
 - Rekurzivně vyřeš podúlohy.
 - Zkombinuj řešení podúloh do celkového výsledku úlohy.
- **Dynamické programování (DP)** je vhodné pro řešení úloh, ve kterých se podúlohy **překrývají**, t.j., **řeší se stejné podúlohy**.
- Pro takové úlohy není metoda rozděl-a-panuj vhodná, protože sdílené podúlohy se **opakovaně** (redundantně) řeší znovu a znovu, což může vést na **řádově vyšší složitost**.
- Metody DP si hodnoty dříve vyřešených podúloh zapamatují a při jejich znovuobjevení je využijí.

Význam termínu DP

- Termín "**programování**" v sousloví "**dynamické programování**" nemá standardní význam vytváření počítačového kódu.
- Je odvozen z termínu "**matematické programování**", což je synonymum pro optimalizaci.
- V této interpretaci, slovo "**program**" znamená optimální či přijatelný plán (rozpis, rozvrh) pro provedení nějaké množiny souvisejících úkonů.
- Programování v tomto smyslu tedy znamená metodu nalezení takového plánu či rozvrhu akcí.

Dynamické programování pro řešení optimalizačních úloh

Definice optimalizační úlohy: Z více možných řešení hledáme řešení s optimální cenou (maximální či minimální hodnotou).

Vytvoření DP algoritmu pro řešení dané optimalizační úlohy se skládá ze 4 kroků:

- Charakterizuj **strukturu** optimálního řešení.
- Rekurzivně definuj **hodnotu** optimálního řešení.
- Vypočítej efektivně **hodnotu** optimálního řešení:
 - metodou shora dolů,
 - metodou zdola nahoru.
- Zrekonstruuj **strukturu** optimálního řešení z vypočtených hodnot.
- Poslední bod odpadá, pokud stačí pouze cena (hodnota) optimálního řešení.

Příklad: Řetězové násobení matic

Definice:

- Je dána posloupnost matic A_1, A_2, \dots, A_n , matice A_i má rozměry $d_{i-1} \times d_i$. **Řetězové násobení matic** (ŘNM) je úkol vypočítat **součin** $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ s **minimální** aritmetickou složitostí (= cenou řešení).
- Jinými slovy, úkolem je najít takové **uzávorkování pořadí** násobení matic, které vede na vynásobení s nejmenším počtem aritmetických operací.
- Předpokládáme klasické násobení matic “řádky krát sloupce”. Složitost součinu $A_i \times A_{i+1}$ aproximujeme výrazem $d_{i-1} \cdot d_i \cdot d_{i+1}$ (zanedbáváme konstanty a nižší členy).

Vlastnosti ŘNM

Poznámky:

- Násobení matic je **asociativní**, proto **jakékoli** uzávorkování dá správný výsledek A.
- Různé pořadí násobení má dramatický vliv na aritmetickou složitost výpočtu.
- Přitom kombinatorická složitost ŘNM je exponenciální, takže řešení hrubou silou, zkoušením všech možností, není myslitelná.

Příklad:

- Uvažujme $n = 3$ a $d_0 = 5$, $d_1 = 50$, $d_2 = 10$ a $d_3 = 30$.
- Pak uzávorkování $(A_1 \times A_2) \times A_3$ má aritmetickou složitost $5 \cdot 50 \cdot 10 + 5 \cdot 10 \cdot 30 = 2500 + 1500 = 4000$, zatímco:
- uzávorkování $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ má složitost $50 \cdot 10 \cdot 30 + 5 \cdot 50 \cdot 30 = 15000 + 7500 = 22500!!!$

Počet různých uzávorkování

- Označme $Z(n)$ počet všech různých způsobů, jak uzávorkovat součin $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.
- Posloupnost matic můžeme rozdělit na dvě části hranicí mezi A_k a A_{k+1} pro libovolné $k = 1, 2, \dots, n-1$ a pak uzávorkovat rekurzívně a nezávisle na sobě obě vzniklé podposloupnosti A_1, \dots, A_k a A_{k+1}, \dots, A_n .

- Proto platí rekurentní vztah:

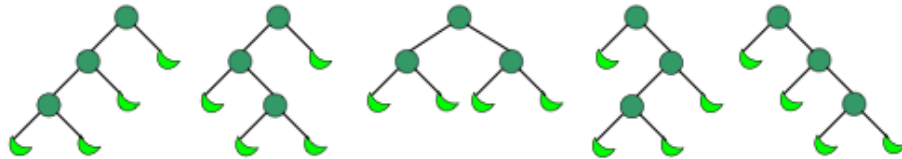
$$Z(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ \sum_{k=1}^{n-1} Z(k)Z(n-k) & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

- Řešením jsou tzv. Catalanova čísla: $Z(n) = C(n-1)$:

$$C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \Omega\left(4^n / n^{\frac{3}{2}}\right)$$

Příklady použití Catalanových čísel

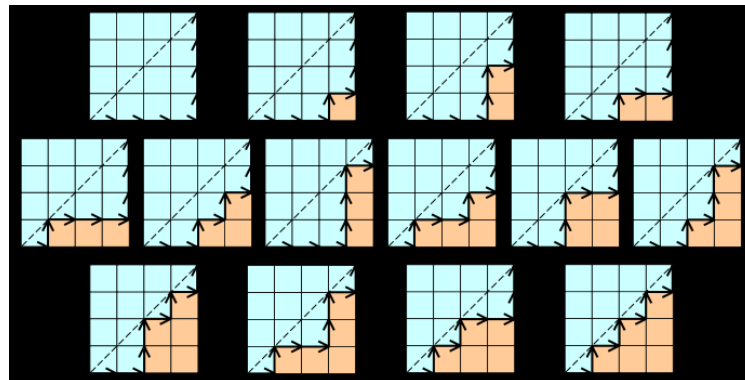
- Počet kořenových binárních stromů s n listy je $C(n-1)$.



- Počet korektních uzávorkování $2n$ závorek je $C(n)$.

$((()))$ $()(())$ $()()()$ $(())()$ $(())()$

- Počet způsobů, jak se v mřížce $n \times n$ dostat z levého dolního do pravého horního rohu, aniž bychom překročili diagonálu nebo se vraceli, je $C(n)$.



První krok DP: Charakterizování optimálního závorkování

- Označme $A_{i\dots j}$ matici vzniklou vynásobením $A_i A_{i+1} \dots A_j$, $i \leq j$.
- Pro každé optimální závorkování existuje **hranice** k , $1 \leq k < n$, taková, že rekurzivně se zkonstruuje závorkování pro výpočet $A_{1\dots k}$, pak závorkování pro výpočet $A_{k+1\dots n}$, a výslednou $A = A_{1\dots n}$ získáme vynásobením $A_{1\dots k} A_{k+1\dots n}$.
- Aritmetická složitost ŘNM je tedy složitost výpočtu $A_{1\dots k}$ + složitost výpočtu $A_{k+1\dots n}$ + složitost násobení 2 matic $A_{1\dots k} A_{k+1\dots n}$.

Lemma

Nechť k je hranice optimálního závorkování (s minimální aritmetickou složitostí). Pak závorkování pro výpočet $A_{1\dots k}$ i závorkování pro výpočet $A_{k+1\dots n}$ musejí být optimální.

- **Důkaz.** Důkaz sporem. Pokud by např. první nebylo, existovalo by závorkování pro $A_{1\dots k}$ s nižší cenou a tím by i výsledná cena byla nižší, což je spor, protože dané závorkování pro $A_{1\dots n}$ je optimální. ■

Druhý krok DP: Rekurzivní definice ceny optimálního závorkování

- Necht' $m[i, j]$ je minimální **cena závorkování** (=nejmenší aritmetická složitost násobení) $A_i A_{i+1} \dots A_j$, $i \leq j$. Pak platí:

$$m[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k + 1, j] + d_{i-1} d_k d_j\} & \text{if } i < j. \end{cases} \quad (1)$$

- Označme $h[i, j]$ právě takové k , které v (1) dává minimum, čili

$$m[i, j] = m[i, h[i, j]] + m[h[i, j] + 1, j] + d_{i-1} d_{h[i, j]} d_j.$$

- Pak cena optimálního závorkování je

$$m[1, n] = m[1, h[1, n]] + m[h[1, n] + 1, n] + d_0 d_{h[1, n]} d_n.$$

Třetí krok DP: Algoritmus výpočtu ceny optimálního závorkování

Přímý rekurzivní algoritmus $\text{RECRNM}(d, 1, n)$ realizující výpočet $m[1, n]$ podle (1) nelze použít, protože má **exponenciální složitost!!!**

```

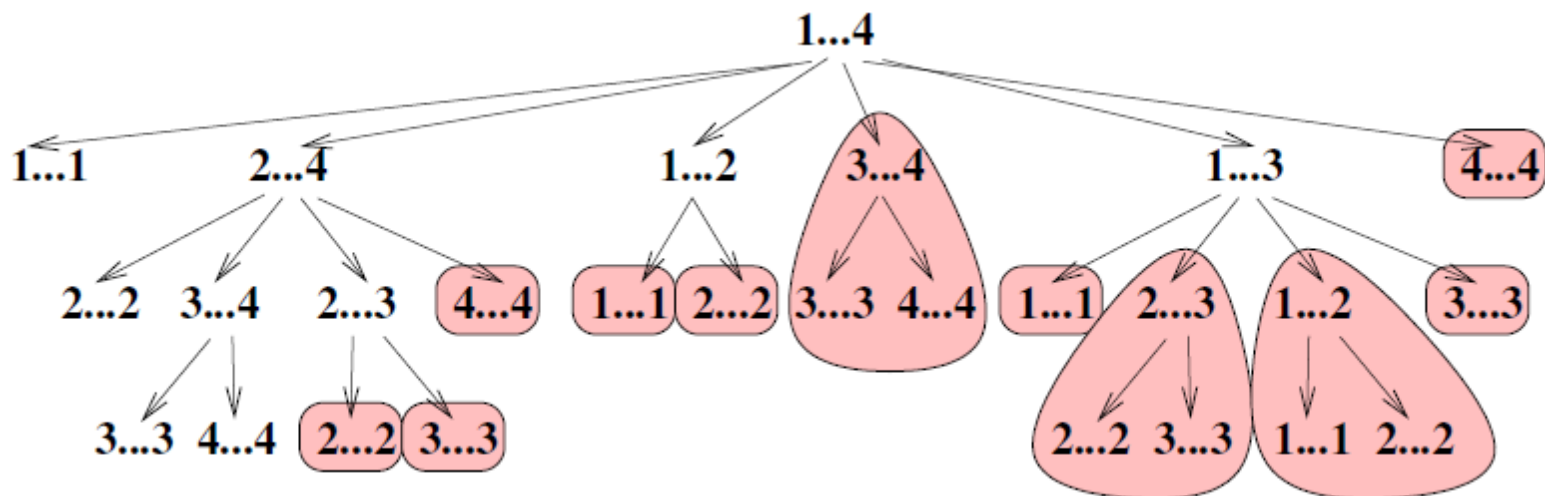
procedure RECRNM( $d, i, j$ )
{
(1)   if ( $i = j$ ) then return(0);
(2)    $m[i, j] \leftarrow +\infty$ ;
(3)   for ( $k \leftarrow i$  to  $j - 1$ )
(4)       do { $q \leftarrow \text{RECRNM}(d, i, k) + \text{RECRNM}(d, k + 1, j)$ 
(5)            $+ d[i - 1] \cdot d[k] \cdot d[j]$ ;
(6)           if ( $q < m[i, j]$ ) then {  $m[i, j] \leftarrow q$ ;  $h[i, j] \leftarrow k$  } };
(7)   return( $m[i, j], h[i, j]$ );
}

```

Strom rekurzivních volání RECRNM

- Důvod exponenciální složitosti je podobný jako u rekurzivního výpočtu Fibonacciho čísel.
- Celkový počet hodnot $m[*,*]$, které je třeba vypočítat pro zjištění hodnoty $m[1, n]$, je pouze počet všech dvojic i, j takových, že $1 \leq i \leq j \leq n$, což je

$$\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2} = \frac{n^2}{2}$$
- Dochází však masivně k opakovanému výpočtu stejných hodnot, viz příklad stromu rekurzivních volání RECRNM(1, 4).



Časová složitost RECRNM($d, 1, n$)

Lemma

Časová složitost $t(n)$ běhu RECRNM($d, 1, n$) je $\Omega(2^{n-1})$.

Důkaz. (Substituční metodou.)

- Předpokládejme, že kód na řádku (1) a (6) trvá čas aspoň 1.
- Pak triviálně $t(1) \geq 1$.
- Dále pro $n > 1$ je $t(n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (t(k) + t(n-k) + 1)$.
- Díky symetrii sčítanců to je totéž jako $t(n) \geq n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} t(i)$.
- Ukažme indukci, že $t(n) \geq 2^{n-1}$.
 - ▶ Indukční základ: $T(1) \geq 1 = 2^0$ triviálně z předpokladů.
 - ▶ Indukční krok pro $n \geq 2$:

$$t(n) \geq n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} = n + 2(2^{n-1} - 1) = n + 2^n - 2 \geq 2^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Třetí krok DP algoritmu: Efektivní varianta 1.

Nerekurzivní algoritmus výpočtu ceny optim. závorkování zdola nahoru.

Předpoklady:

- Vstupem je pole $d[0, \dots, n]$ rozměrů matic.
- Výstupem jsou 2 pole:
 - $m[1, \dots, n, 1, \dots, n]$, kam se ukládají ceny optimálního závorkování pro výpočet $A_{i\dots j}$,
 - $h[1 \dots n - 1, 2 \dots n]$, kam se ukládají příslušné hodnoty hranic optimálního závorkování.

Princip:

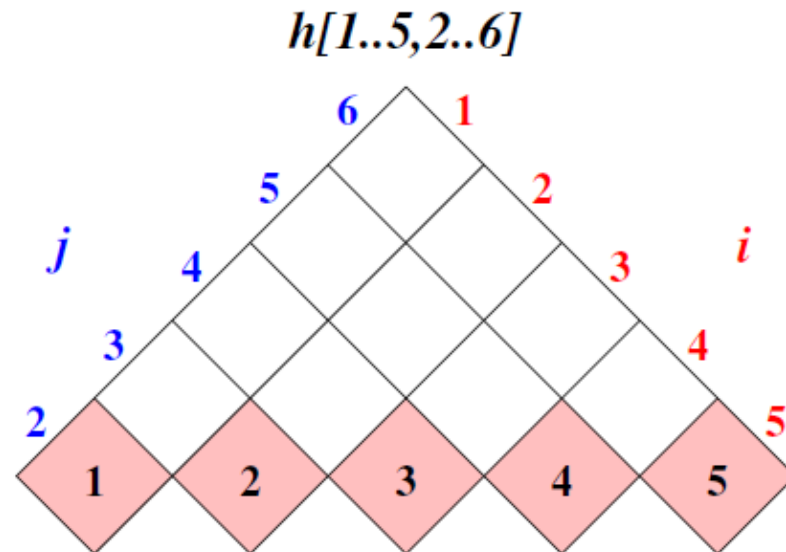
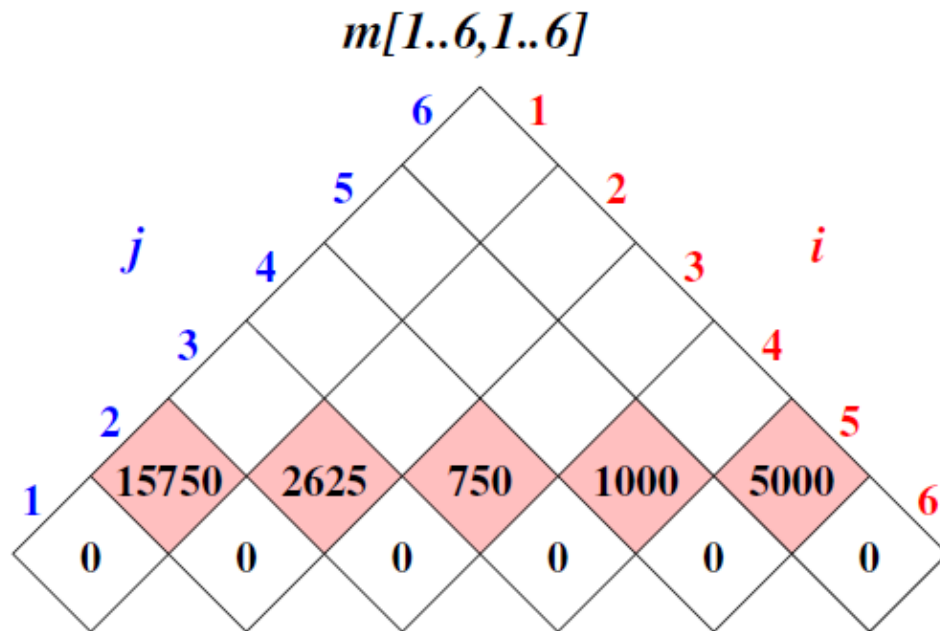
- Systematické zaplňování tabulky zdola nahoru pro všechny dvojice i, j , kde $1 \leq i \leq j \leq n$ ($\binom{n+1}{2}$ hodnot).

```

procedure BOTTOMUPRNM( $n, d, m, h$ )
{
(1) for ( $i \leftarrow 1$  to  $n$ ) do  $m[i, i] \leftarrow 0$ ;
(2) for ( $l \leftarrow 2$  to  $n$ )
(3)   for ( $i \leftarrow 1$  to  $n - l + 1$ )
(4)     do {  $j \leftarrow i + l - 1$ ;
(5)        $m[i, j] \leftarrow +\infty$ ;
(6)       for ( $k \leftarrow i$  to  $j - 1$ )
(7)         do {  $q \leftarrow m[i, k] + m[k + 1, j] + d[i - 1] \cdot d[k] \cdot d[j]$ ;
(8)           if ( $q < m[i, j]$ )
(9)             then {  $m[i, j] \leftarrow q$ ;
(10)               $h[i, j] \leftarrow k$ };
(11)           }
(11)       };
(12) return( $m[1 \dots n, 1 \dots n], h[1 \dots n - 1, 2 \dots n]$ );
}

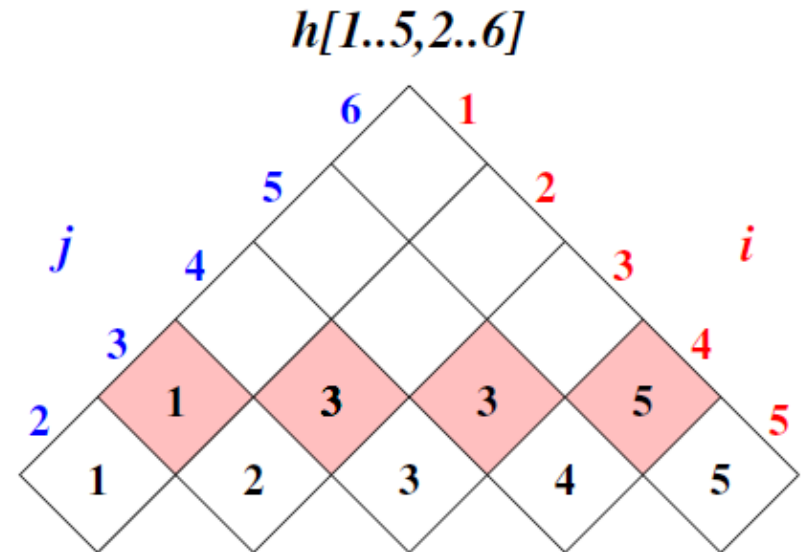
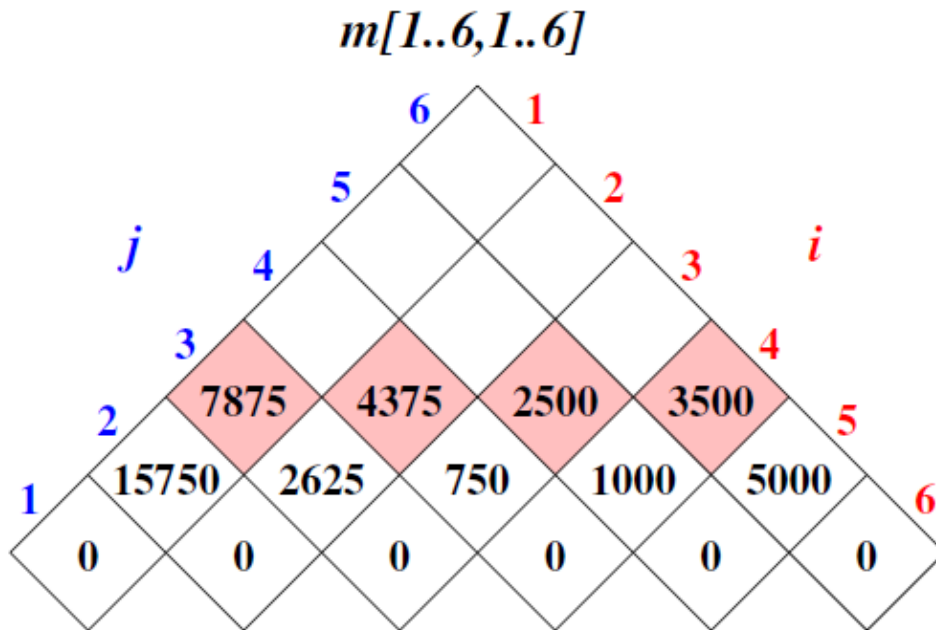
```

Příklad běhu BOTTOMUPRNM(6, d,m, h)



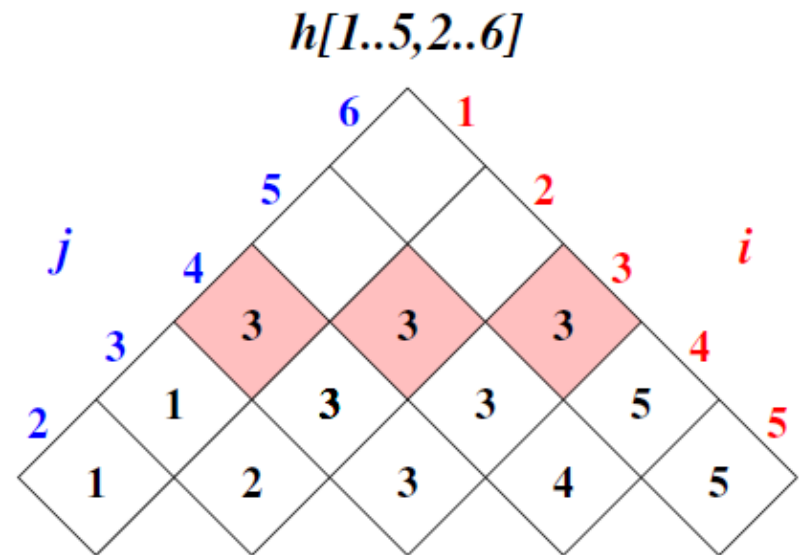
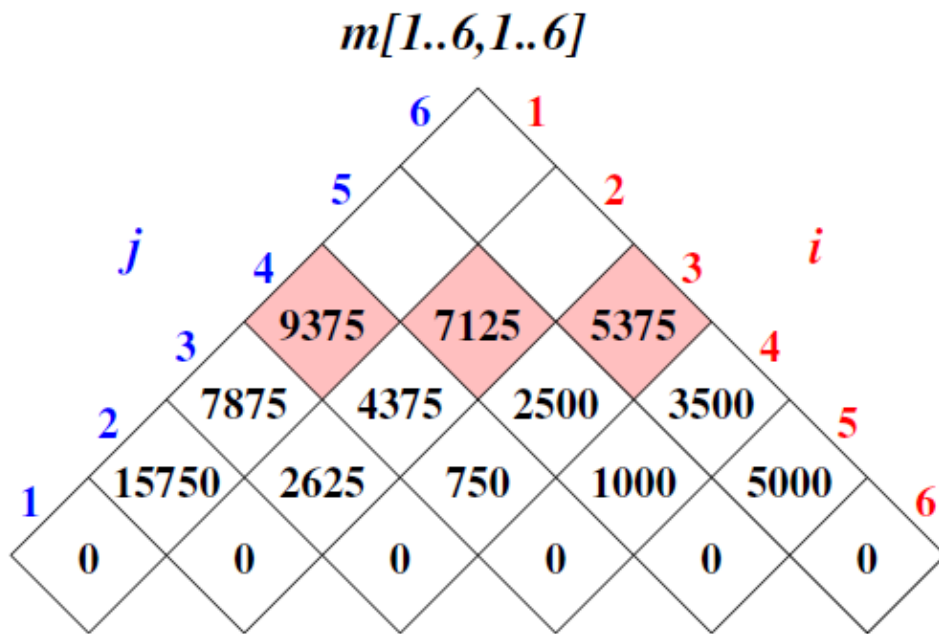
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

Příklad běhu BOTTOMUPRNM(6, d,m, h)



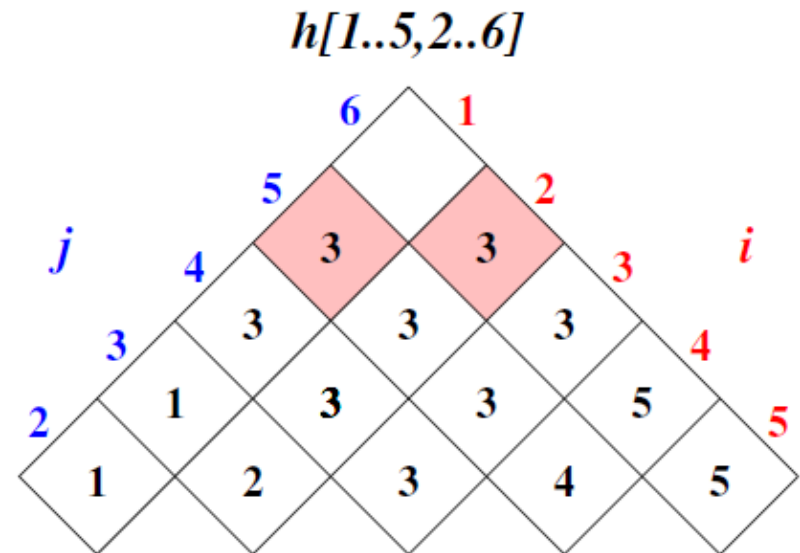
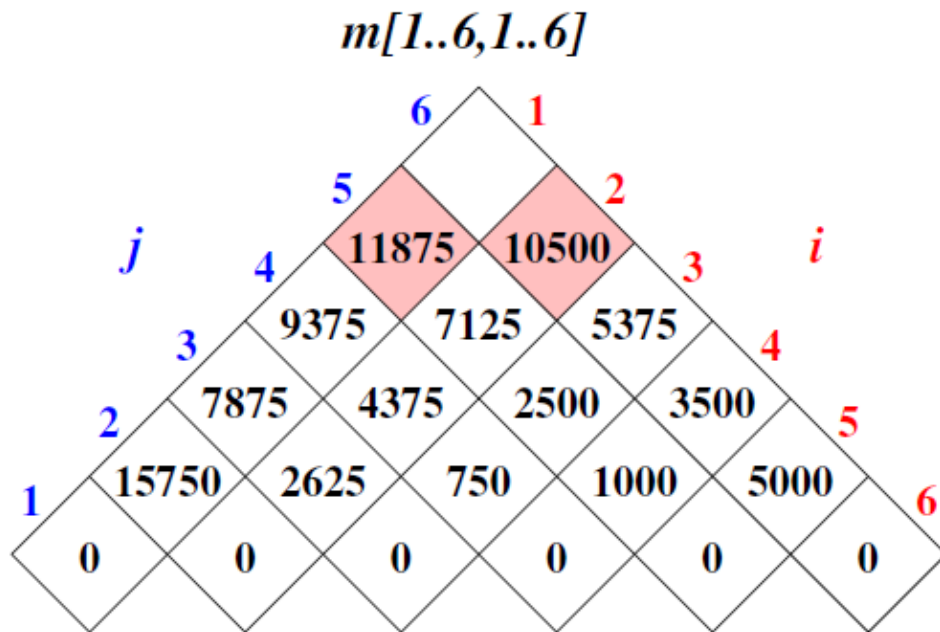
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

Příklad běhu BOTTOMUPRNM(6, d,m, h)



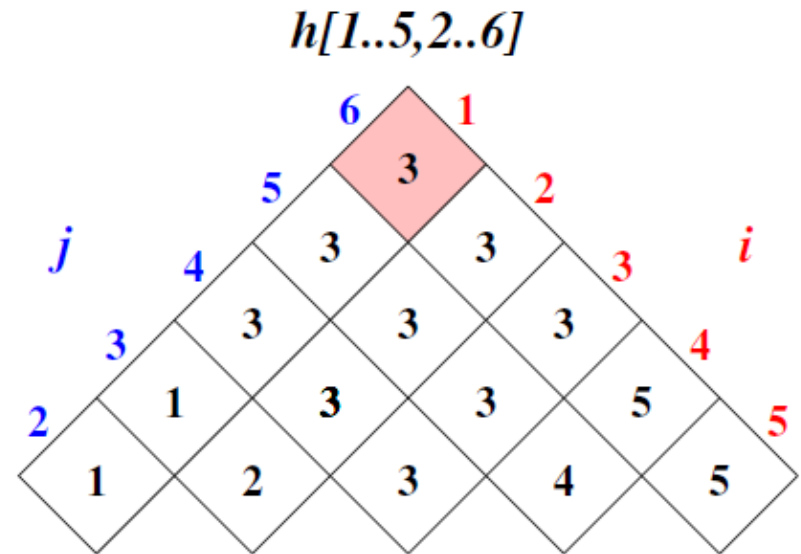
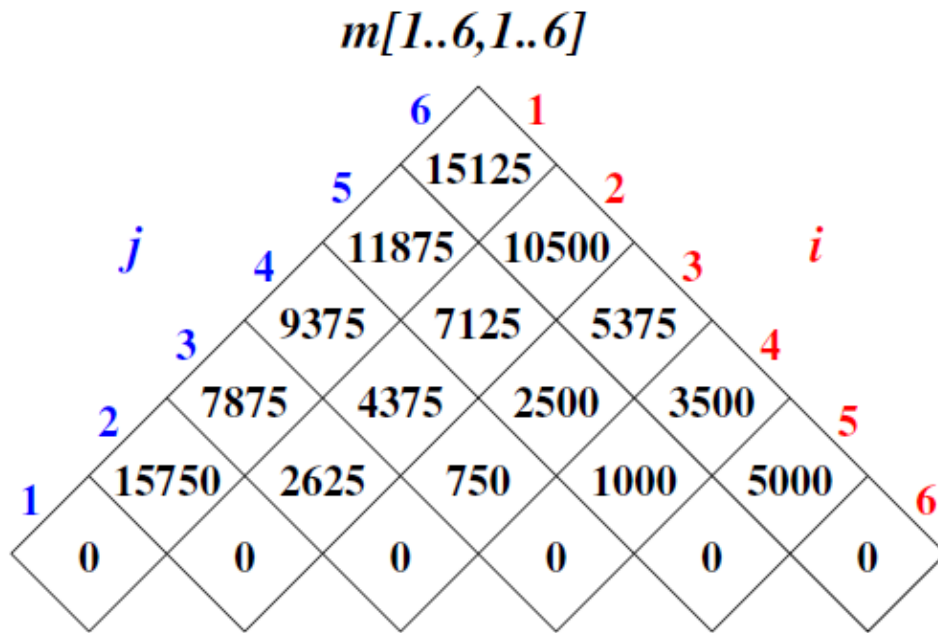
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

Příklad běhu BOTTOMUPRNM(6, d,m, h)



A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

Příklad běhu BOTTOMUPRNM(6, d,m, h)



A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25

Třetí krok DP algoritmu: Varianta 2

Rekurzivní algoritmus (shora dolů) výpočtu ceny optimálního závorkování s tabelací

Princip tabelace (anglicky memoization):

- Algoritmus také vytváří tabulku s hodnotami řešení podúloh.
- Každá položka tabulky je také inicializována speciální hodnotou **Neurceno**.
- Řídící struktura pro zaplňování však není záplavové plnění zdola nahoru jako ve variantě 1, ale pořadí vyvolávané rekurzivním algoritmem.
- První rekurzivně vyvolané řešení dané podúlohy provede výpočet a výsledek uloží do příslušného místa v tabulce.
- Následné opakované volání řešení téže podúlohy pouze přečte tuto hodnotu z tabulky.

Rekurzivní algoritmus s tabelací

```

procedure MEMRECRNM( $n, d$ ) {
(1)  for ( $i \leftarrow 1$  to  $n$ )
(2)    for ( $j \leftarrow i$  to  $n$ ) do  $m[i, j] \leftarrow$  Neurceno.
(3)  return(LOOKUPRNM( $d, 1, n$ ))}

```

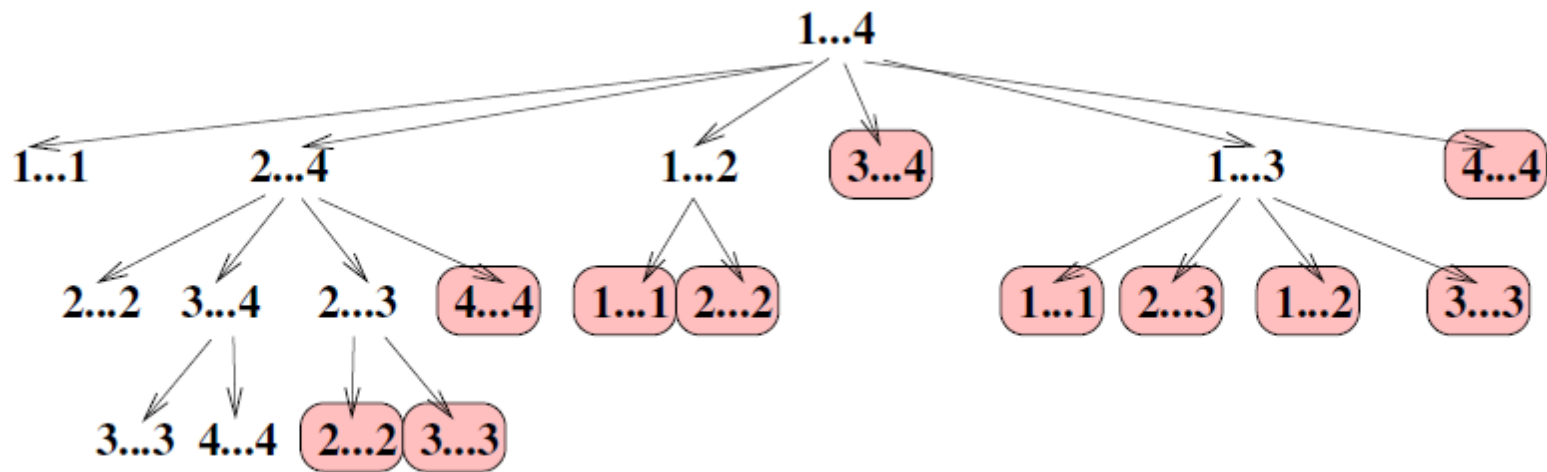
```

procedure LOOKUPRNM( $d, i, j$ ) {
(1)  if ( $m[i, j] \neq$  Neurceno)
(2)    then return( $m[i, j]$ );
(3)  if ( $i = j$ )
(4)    then  $m[i, j] \leftarrow 0$ 
(5)    else for ( $k \leftarrow i$  to  $j - 1$ )
(6)      do { $q \leftarrow$  LOOKUPRNM( $d, i, k$ )
(7)         $+ \text{LOOKUPRNM}(d, k + 1, j) + d[i - 1] \cdot d[k] \cdot d[j]$ ;
(8)        if ( $q < m[i, j]$ ) then { $m[i, j] \leftarrow q$ ;  $h[i, j] \leftarrow k$ }};
(9)  return( $m[i, j]$ )}

```

Strom rekurzivních volání MEMRECRNM

- Zakroužkované uzly stromu rekurzivních volání se nepočítají, ale pouze načtou z tabulky.



Srovnání MEMRECRNM a BOTTOMUPRNM

Lemma:

- Oba algoritmy mají složitost $O(n^3)$.

Srovnání:

- Algoritmus MEMRECRNM je svojí podstatou metoda shora dolů, kdežto BOTTOMUPRNM je metoda zdola nahoru.
- Pokud logika výpočtu vyžaduje, aby každá podúloha byla řešena aspoň jednou, pak BOTTOMUPRNM je rychlejší o multiplikativní konstantu.
- Pravidelnost přístupu do tabulky pak uspoří čas i díky menším výpadkům skrytých pamětí a efektivnějším tokům dat mezi pamětí a procesorem.
- Pokud rekurzivní sestup umožní, že některé podúlohy se vůbec nevyvolají, pak může být rychlejší MEMRECRNM.

Čtvrtý krok DP algoritmu: Konstrukce optimálního řešení úlohy ŘNM

- Tabulka $h[1 \dots n - 1, 2 \dots n]$ obsahuje hodnoty hranic pro optimální závorkování při ŘNM.
- Díky Lemmatu o možném uzávorkování je konstrukce optimálního řešení triviální - rekurzivním sestupem.
- Na nejvyšší úrovni to je $h[1, n]$: Nejprve rekurzivně optimálně vypočteme $A_1 \times \dots \times A_{h[1,n]}$, pak $A_{h[1,n]+1} \times \dots \times A_n$ a výsledné matice nakonec vynásobíme.

Čtvrtý krok DP algoritmu: Konstrukce optimálního řešení úlohy ŘNM

- Úloha ŘNM je pak vyřešena voláním $\text{RNM}(A, n, h, 1, n)$.
- Vstupní data: posloupnost matic A_1, A_2, \dots, A_n a tabulka hranic $h[1 \dots n - 1, 2 \dots n]$.

```

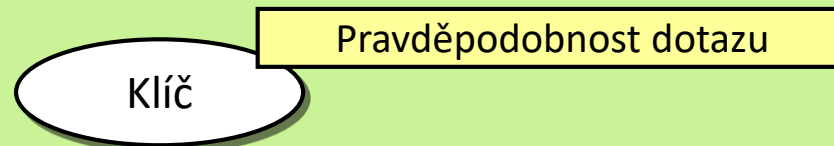
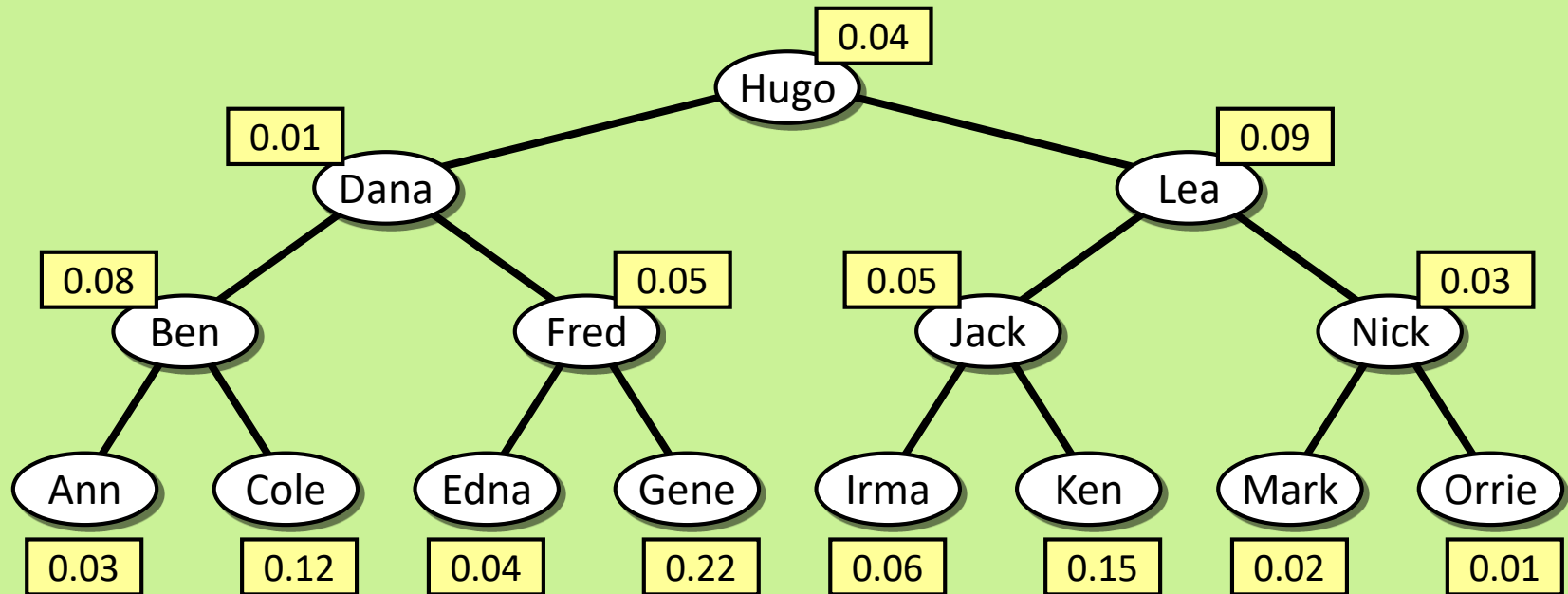
procedure RNM( $A, n, h, i, j$ )
{
(1)   if ( $i < j$ )
(2)   then {  $X \leftarrow \text{RNM}(A, n, h, i, h[i, j])$ ;
(3)        $Y \leftarrow \text{RNM}(A, n, h, h[i, j] + 1, j)$ ;
(4)       return( $XY$ ) }
(5)   else return( $A_i$ );
}

```

DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ: OPTIMÁLNÍ BINÁRNÍ VYHLEDÁVACÍ STROM

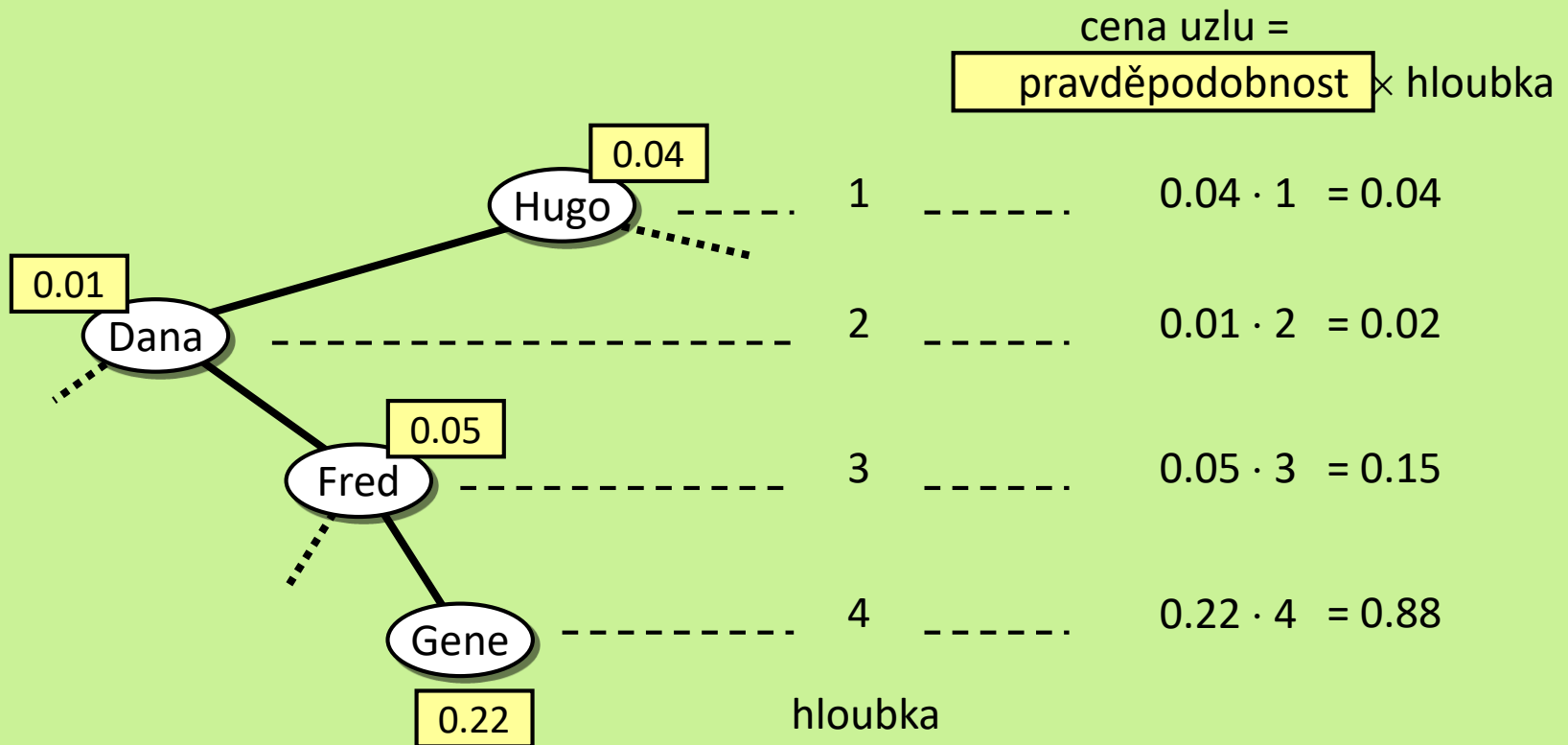
Optimální binární vyhledávací strom

Vyvážený, ale ne optimální



Optimální binární vyhledávací strom

Cena jednotlivých uzlů v BVS



cena uzlu = průměrný počet testů na nalezení uzlu
 při jednom dotazu (Find)

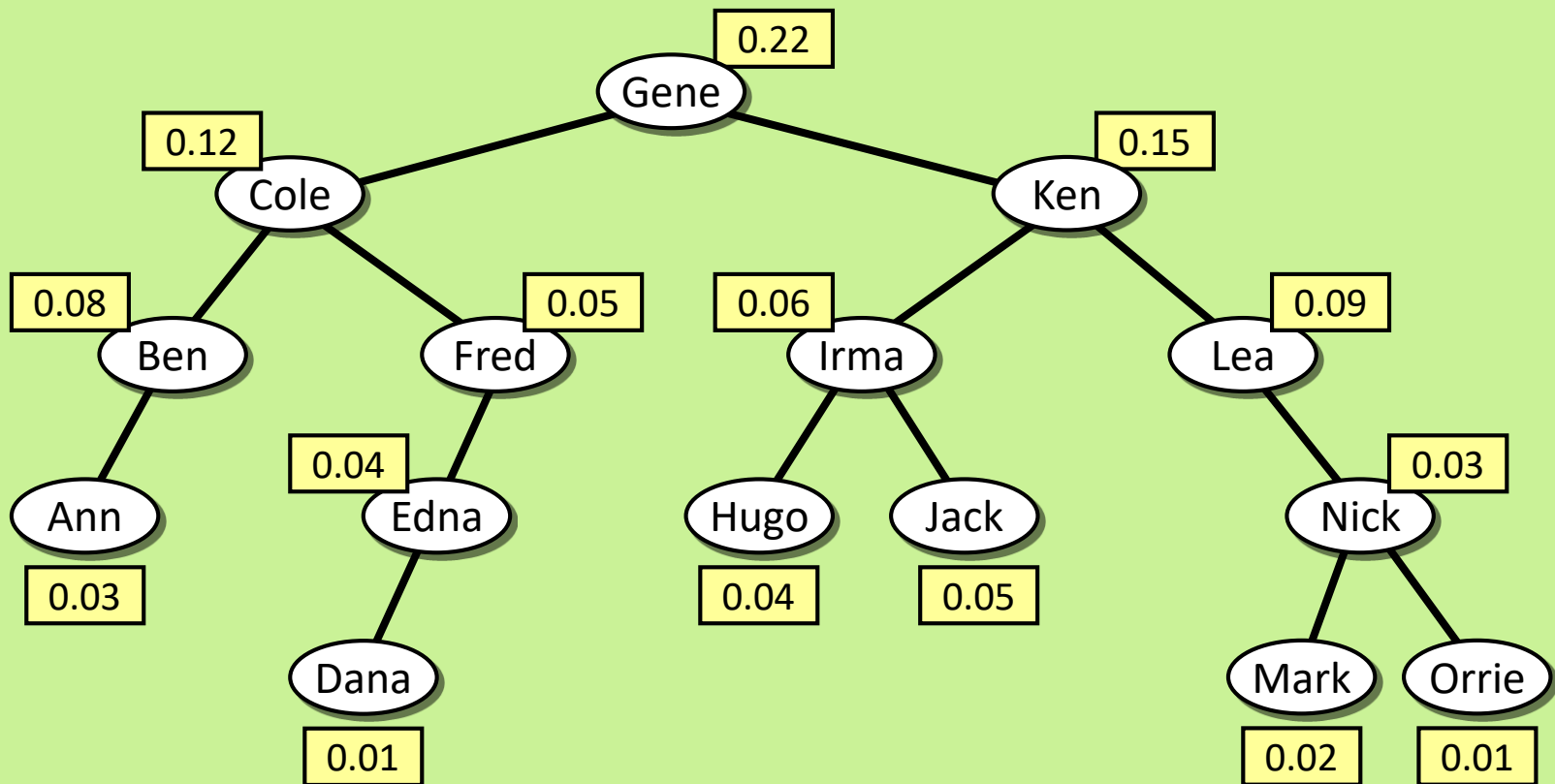
Cena vyváženého stromu

klíč	pravděp. p_k	hloubka d_k	$p_k \cdot d_k$
Ann	0.03	4	$0.03 \cdot 4 = 0.12$
Ben	0.08	3	$0.08 \cdot 3 = 0.24$
Cole	0.12	4	$0.12 \cdot 4 = 0.48$
Dana	0.01	2	$0.01 \cdot 2 = 0.02$
Edna	0.04	4	$0.04 \cdot 4 = 0.16$
Fred	0.05	3	$0.05 \cdot 3 = 0.15$
Gene	0.22	4	$0.22 \cdot 4 = 0.88$
Hugo	0.04	1	$0.04 \cdot 1 = 0.04$
Irma	0.06	4	$0.06 \cdot 4 = 0.24$
Jack	0.05	3	$0.05 \cdot 3 = 0.15$
Ken	0.15	4	$0.15 \cdot 4 = 0.60$
Lea	0.09	2	$0.09 \cdot 2 = 0.18$
Mark	0.02	4	$0.02 \cdot 4 = 0.08$
Nick	0.03	3	$0.03 \cdot 3 = 0.09$
Orrie	0.01	4	$0.01 \cdot 4 = 0.04$
Cena celkem:			3.47

Cena celkem = prům. poč. testů na jednu operaci Find.

Optimální BVS

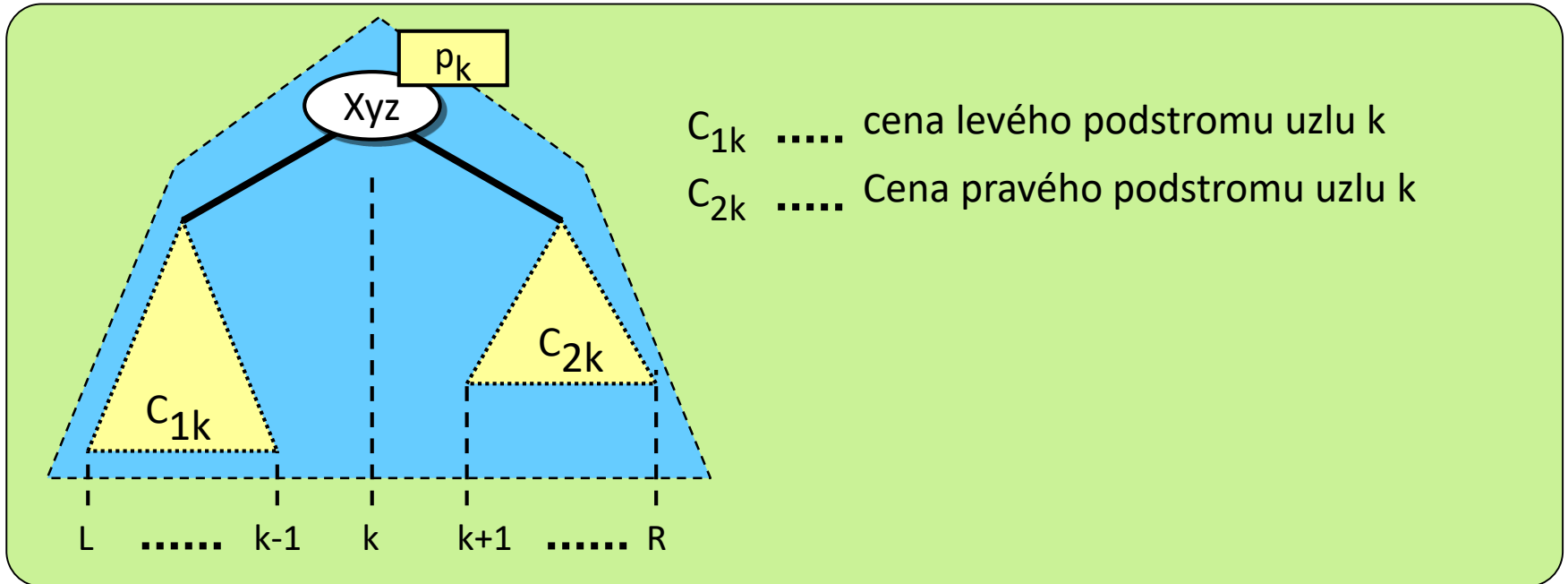
Struktura optimálního BVS s danými pravděpodobnostmi



Cena optimálního BVS

klíč	pravděp. p_k	hloubka d_k	$p_k \cdot d_k$
Ann	0.03	4	$0.03 \cdot 4 = 0.12$
Ben	0.08	3	$0.08 \cdot 3 = 0.24$
Cole	0.12	2	$0.12 \cdot 2 = 0.24$
Dana	0.01	5	$0.01 \cdot 5 = 0.05$
Edna	0.04	4	$0.04 \cdot 4 = 0.16$
Fred	0.05	3	$0.05 \cdot 3 = 0.15$
Gene	0.22	1	$0.22 \cdot 1 = 0.22$
Hugo	0.04	4	$0.04 \cdot 4 = 0.16$
Irma	0.06	3	$0.06 \cdot 3 = 0.18$
Jack	0.05	4	$0.05 \cdot 4 = 0.20$
Ken	0.15	2	$0.15 \cdot 2 = 0.30$
Lea	0.09	3	$0.09 \cdot 3 = 0.27$
Mark	0.02	5	$0.02 \cdot 5 = 0.10$
Nick	0.03	4	$0.03 \cdot 4 = 0.12$
Orrie	0.01	5	$0.01 \cdot 5 = 0.05$
Cena celkem			2.56
Zrychlení	$3.47 : 2.56 = 1 : 0.74$		

Výpočet ceny optimálního BVS

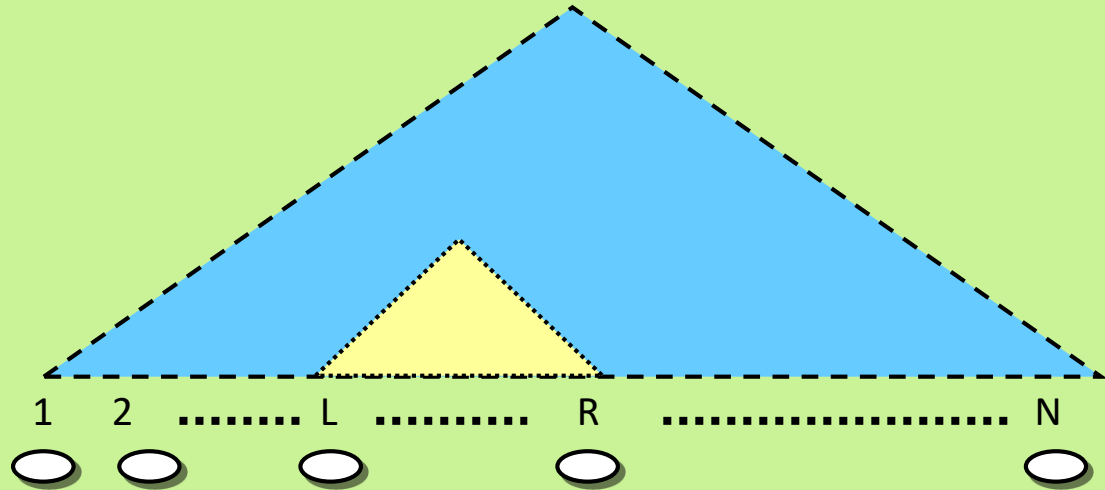


Rekurzivní
myšlenka

$$\text{Cena} = C_{1k} + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C_{2k} + \sum_{i=k+1}^R p_i + p_k$$

Výpočet ceny optimálního BVS

Malé optimální podstromy



Nad prvky s indexy od L do R lze jistě vytvořit jeden optimální podstrom.

Velikost stromu
= poč. uzlů
= $R-L+1$

Máme N optimálních podstromů velikosti 1

$N-1$ 2

$N-2$ 3

⋮

⋮

1

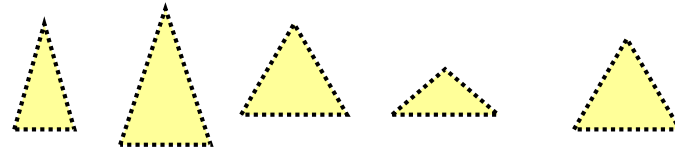
podstrom

N

Celkem máme $N * (N+1) / 2$ různých optimálních podstromů.

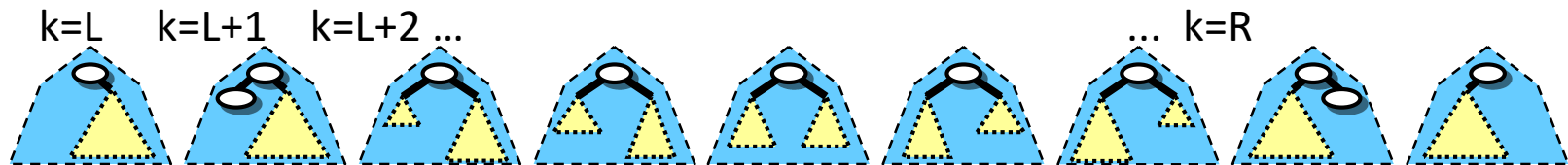
Minimalizace ceny BVS

Idea rekurzivního řešení:



1. Předpoklad : Všechny menší optimální stromy jsou známy.

2. Zkus: $k = L, L+1, L+2, \dots, R$



3. Zaregistruj index k , který minimalizuje cenu, tj. zaregistruj hodnotu:

$$C_{1k} + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C_{2k} + \sum_{i=k+1}^R p_i + p_k$$

4. Klíč s indexem k je kořenem optimálního stromu.

Minimalizace ceny BVS

$C(L,R)$ Cena optimálního podstromu obsahujícího klíče
s indexy $L, L+1, L+2, \dots, R-1, R$

$$C(L,R) = \min_{L \leq k \leq R} \left\{ C(L, k-1) + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C(k+1, R) + \sum_{i=k+1}^R p_i + p_k \right\} =$$

$$= \min_{L \leq k \leq R} \left\{ C(L, k-1) + C(k+1, R) + \sum_{i=L}^R p_i \right\} =$$

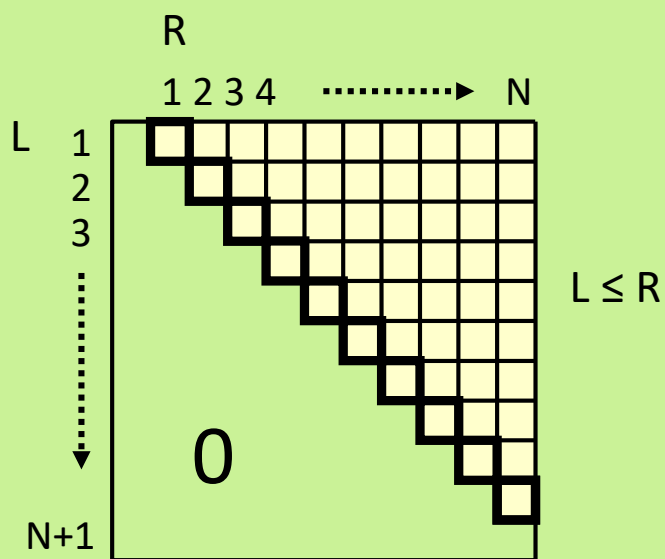
$$(*) = \min_{L \leq k \leq R} \left\{ C(L, k-1) + C(k+1, R) \right\} + \sum_{i=L}^R p_i$$

Hodnota k minimalizující (*) je indexem kořene optimálního podstromu.

Datové struktury pro výpočet optimálního BVS

Ceny optimálních podstromů

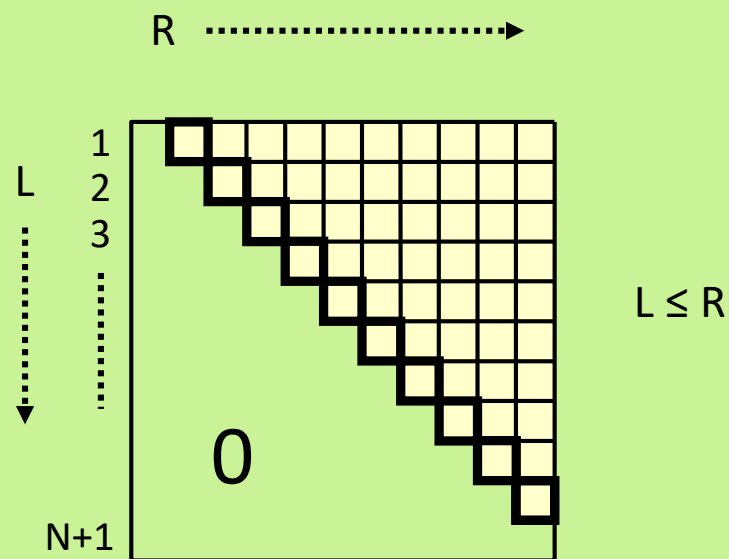
pole $C[L][R]$ ($L \leq R$)



diagonála ... $L = R$

Kořeny optimálních podstromů

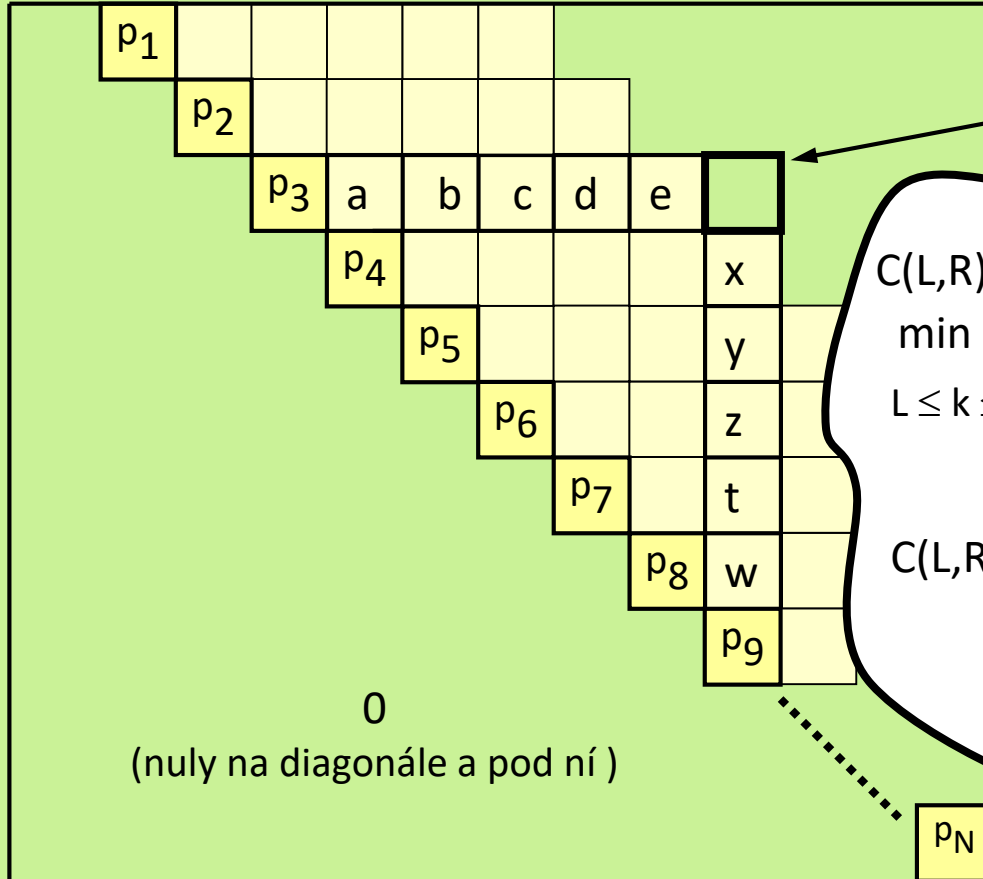
pole $roots[L][R]$ ($L \leq R$)



diagonála ... $L = R$

Výpočet optimálního BVS

Cena konkrétního optimálního podstromu



$L=3, R=9$

$$C(L,R) = \min \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) \} + \sum_{i=L}^R p_i$$

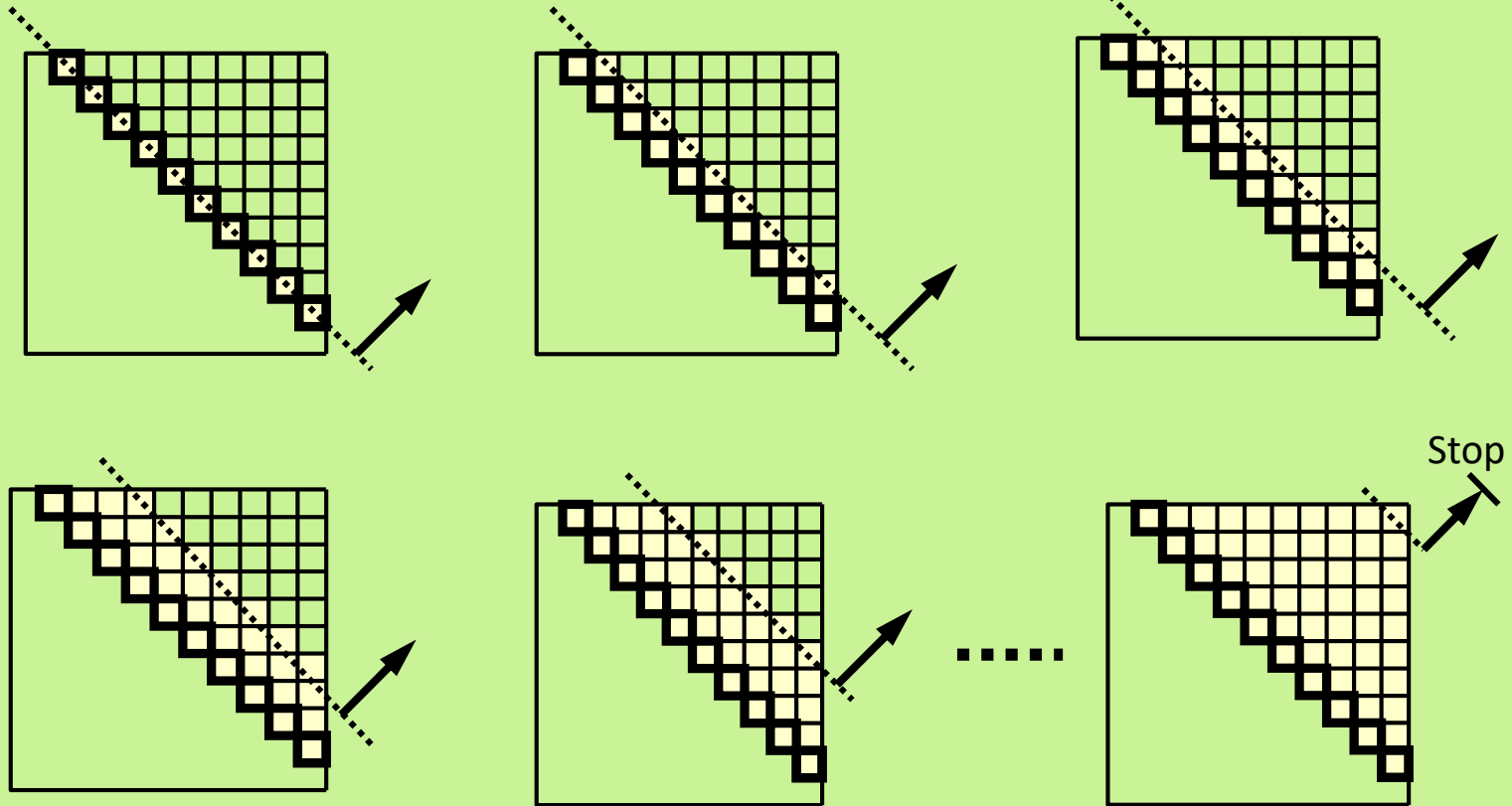
$$L \leq k \leq R$$

$$C(L,R) = \min \{ 0+x, p_3+y, a+z, b+t, c+w, d+p_9, e+0 \} + \sum_{i=L}^R p_i$$

Výpočet optimálního BVS

Strategie dynamického programování

– nejprve se zpracují nejmenší podstromy, pak větší, atd...



Výpočet optimálního BVS

Výpočet polí cen a kořenů

```

void optimalTree() {
    int L, R, k, size;    double min;

    // size = 1
    for (int i=0; i<=N; i++) {
        C[i][i] = pravděpodobnost[i]; R[i][i] = i;
    }
    // size > 1
    for (size = 2; size <= N; size++) {
        L = 1; R = size;
        while (R <= N) {
            C[L][R] = min(C[L][k-1]+C[k+1][R], k = L..R);
            roots[L][R] = 'k minimalizující předch. řádek';
            C[L][R] += sum(C[i][i], i = L..R);
            L++; R++;
        } } }

```

Výpočet optimálního BVS

Vybudování optimálního stromu pomocí pole kořenů

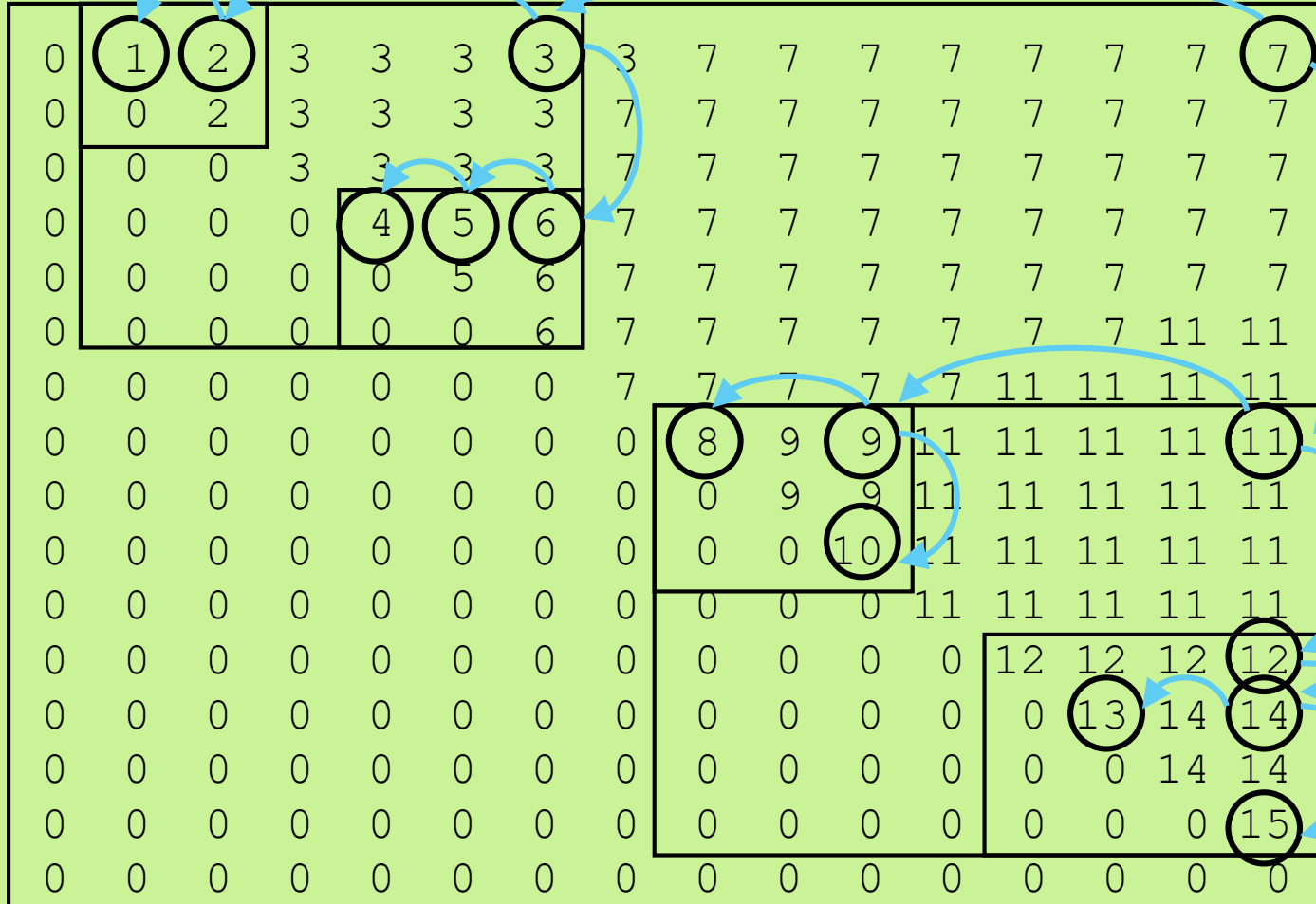
```
void buildTree(int L, int R) {  
    int key;  
    if (R < L) return;  
    key = roots[L][R];  
    insert(root, key); // standard BST insert  
    buildTree(L, key-1);  
    buildTree(key+1, R);  
}
```

Volání funkce buildTree vybuduje optimální strom:

```
buildTree(1, N);
```

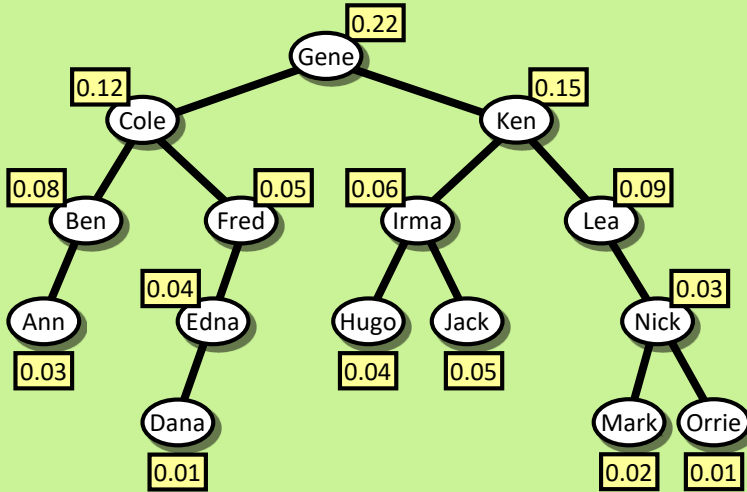

Výpočet optimálního BVS

Kořeny optimálních podstromů

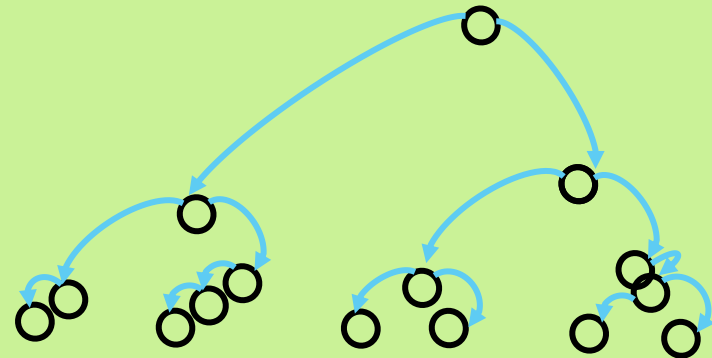
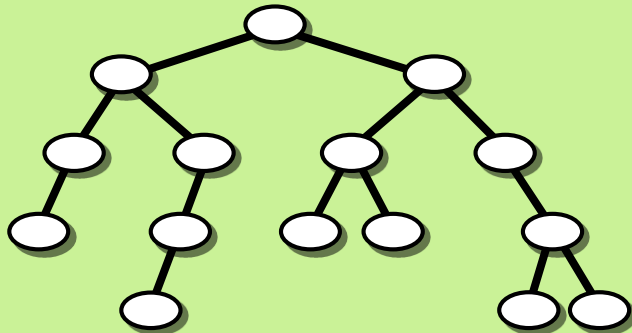


Výpočet optimálního BVS

Korespondence stromů



0	1	2	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	2	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	4	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	5	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	9	9	11	11	11	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9	11	11	11	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	11	11	11	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	11	11	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	12	12	12	12	12	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	14	14	14	14	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	14	14	14	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	15	15	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Výpočet optimálního BVS

Ceny optimálních podstromů

	1-A	2-B	3-C	4-D	5-E	6-F	7-G	8-H	9-I	10-J	11-K	12-L	13-M	14-N	15-O
1-A	0.03	0.14	0.37	0.39	0.48	0.63	1.17	1.26	1.42	1.57	2.02	2.29	2.37	2.51	2.56
2-B	0	0.08	0.28	0.30	0.39	0.54	1.06	1.14	1.30	1.45	1.90	2.17	2.25	2.39	2.44
3-C	0	0	0.12	0.14	0.23	0.38	0.82	0.90	1.06	1.21	1.66	1.93	2.01	2.15	2.20
4-D	0	0	0	0.01	0.06	0.16	0.48	0.56	0.72	0.87	1.32	1.59	1.67	1.81	1.86
5-E	0	0	0	0	0.04	0.13	0.44	0.52	0.68	0.83	1.28	1.55	1.63	1.77	1.82
6-F	0	0	0	0	0	0.05	0.32	0.40	0.56	0.71	1.16	1.43	1.51	1.63	1.67
7-G	0	0	0	0	0	0	0.22	0.30	0.46	0.61	1.06	1.31	1.37	1.48	1.52
8-H	0	0	0	0	0	0	0	0.04	0.14	0.24	0.54	0.72	0.78	0.89	0.93
9-I	0	0	0	0	0	0	0	0	0.06	0.16	0.42	0.60	0.66	0.77	0.81
10-J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0.25	0.43	0.49	0.60	0.64
11-K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.33	0.39	0.50	0.54
12-L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.09	0.13	0.21	0.24
13-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02	0.07	0.09
14-N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03	0.05
15-O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01

DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ:

NEJDELŠÍ SPOLEČNÁ PODPOSLOUPNOST

Nejdelší společná podposloupnost

Dvě
posloupnosti

A: C B E A D D E A $|A| = 8$
 B: D E C D B D A $|B| = 7$

Společná
podposloupnost

A: C B E A D D E A
 B: D E C D B D A
 C: C D A $|C| = 3$

Nejdelší
společná
podposloupnost
(NSP, angl: LCS)

A: C B E A D D E A
 B: D E C D B D A
 C: E D D A $|C| = 4$

Nejdelší společná podposloupnost

$A_n: (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$B_m: (b_1, b_2, \dots, b_m)$

$C_k: (c_1, c_2, \dots, c_k)$

.....
 $C_k = \text{LCS}(A_n, B_m)$

1 2 3 4 5 6 7 8

$A_8:$

C	B	E	A	D	D	E	A
---	---	---	---	---	---	---	---

$B_7:$

D	E	C	D	B	D	A
---	---	---	---	---	---	---

$C_4:$

E	D	D	A
---	---	---	---

Rekurzivní pravidla:

$(a_n = b_m) \implies (c_k = a_n = b_m) \ \& \ (C_{k-1} = \text{LCS}(A_{n-1}, B_{m-1}))$

1 2 3 4 5 6 7 8

$A_8:$

C	B	E	A	D	D	E	A
---	---	---	---	---	---	---	---

$B_7:$

D	E	C	D	B	D	A
---	---	---	---	---	---	---

$C_4:$

E	D	D	A
---	---	---	---

1 2 3 4 5 6 7 8

$A_7:$

C	B	E	A	D	D	E	A
---	---	---	---	---	---	---	---

$B_6:$

D	E	C	D	B	D	A
---	---	---	---	---	---	---

$C_3:$

E	D	D	A
---	---	---	---

Nejdelší společná podposloupnost

$$(a_n \neq b_m) \ \& \ (c_k \neq a_n) \implies (C_k = \text{LCS}(A_{n-1}, B_m))$$

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8	
A ₇ :	C	B	E	A	D	D	E		A ₆ :	C	B	E	A	D	D	E		
B ₆ :	D	E	C	D	B	D			B ₆ :	D	E	C	D	B	D			
C ₃ :	E	D	D						C ₃ :	E	D	D						

$$(a_n \neq b_m) \ \& \ (c_k \neq b_m) \implies (C_k = \text{LCS}(A_n, B_{m-1}))$$

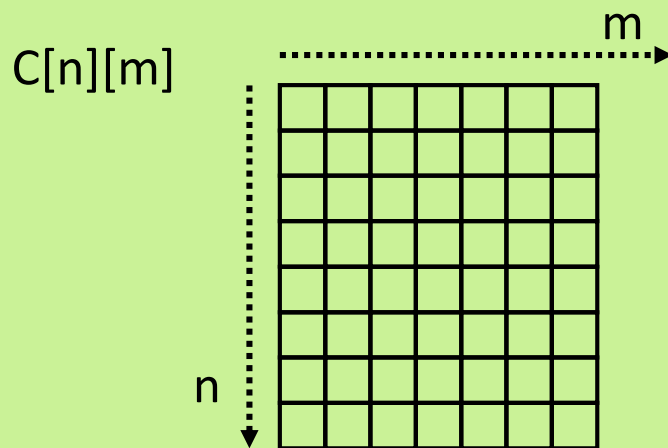
	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8	
A ₅ :	C	B	E	A	D				A ₅ :	C	B	E	A	D				
B ₅ :	D	E	C	D	B				B ₄ :	D	E	C	D	B				
C ₂ :	E	D							C ₂ :	E	D							

Nejdelší společná podposloupnost

Rekurzivní funkce – délka NSP

$$C(n,m) = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ or } m = 0 \\ C(n-1, m-1) + 1 & n > 0, m > 0, a_n = b_m \\ \max\{ C(n-1, m), C(n, m-1) \} & n > 0, m > 0, a_n \neq b_m \end{cases}$$

Strategie dynamického programování



```
for (a=1; a<=n; a++)
  for (b=1; b<=m; b++)
    C[a][b] = ... ;
```

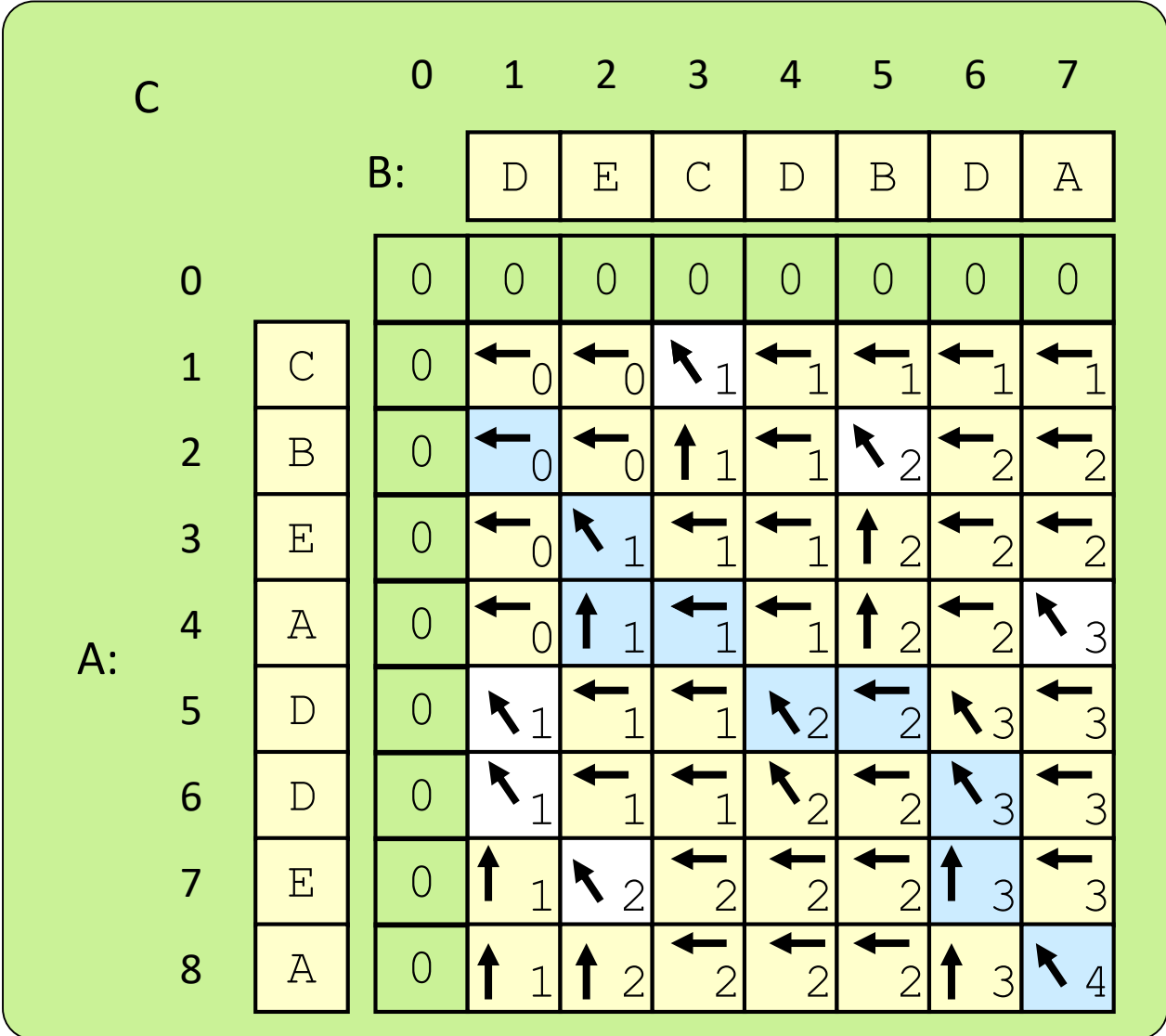

Nejdelší společná podposloupnost

Konstrukce pole pro NSP

```
void findLCS() {
    int a, b;
    for (a=1; a<=n; a++)
        for (b=1; b <= m; b++)
            if (A[a] == B[b]) {
                C[a][b] = C[a-1][b-1]+1;
                arrows[a][b] = DIAG; ↖
            }
            else
                if (C[a-1][b] > C[a][b-1]) {
                    C[a][b] = C[a-1][b];
                    arrows[a][b] = UP; ↑
                }
                else {
                    C[a][b] = C[a][b-1];
                    arrows[a][b] = LEFT; ←
                }
        }
}
```

Nejdelší společná podposloupnost

Pole
NSP
pro
"CBEADDEA"
a
"DECDBDA"



Nejdelší společná podposloupnost

Výpis NSP -- rekurzivně :)

```
void outLCS(int a, int b) {
    if ((a == 0) || (b == 0)) return;

    if (arrows[a][b] == DIAG) {
        outLCS(a-1, b-1);    // recursion ...
        print(A[a]);        //... reverses the sequence!
    }
    else
        if (arrows[a][b] == UP)
            outLCS(a-1, b);
        else
            outLCS(a, b-1);
}
```

DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ:

ŘEZÁNÍ TYČÍ

Problém řezání tyčí

- Firma Serling Enterprises se zabývá prodejem železných tyčí. Nakupuje tyče určité délky, řeže je na menší délky a prodává. Předpokládáme, že řez má zanedbatelnou cenu. Chceme navrhnout optimální sadu řezů.
- Jako vstup uvažujeme řadu cen p_i , které si firma účtuje za tyč délky i (1,2,...). Problém je nalézt pro tyč délky n optimální řezy tak, aby zisk byl co největší. Pozn.: pokud by cena p_n byla dostatečně vysoká, bude optimální vůbec neřezat.
- Př.: Uvažme tabulku cen:

délka	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cena	1	5	8	9	10	11	17	20	24	30

- Pro tyč délky 4 je optimální jeden řez na dvě tyče délky 2.

Problém řezání tyčí (pokr.)

- Pokud tyč délky n rozřízneme na k kusů, pak $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$.
- Označme si r_n zisk z takového řezu: $r_n = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$.

l	r_l	řešení
1	1	$1 = 1$ (bez řezu)
2	5	$2 = 2$ (bez řezu)
3	8	$3 = 3$ (bez řezu)
4	10	$4 = 2 + 2$
5	13	$5 = 2 + 3$
6	17	$6 = 6$ (bez řezu)
7	18	$7 = 1 + 6$ nebo $7 = 2 + 2 + 3$
8	22	$8 = 2 + 6$
9	25	$9 = 3 + 6$
10	30	(bez řezu)

Problém řezání tyčí (pokr.)

- Zisk lze spočítat z předchozích hodnot dle vztahu:
$$r_n = \max(p_n, r_1 - r_{n-1}, r_2 - r_{n-2}, \dots, r_{n-1} - r_1).$$
- Abychom mohli spočítat řešení problému rozsahu n , musíme spočítat řešení problémů velikosti $n-1$, $n-2$, atd. Navíc, pokud rozřízneme tyč na dva kusy, můžeme uvažovat řešení obou částí jako nezávislá, ze kterých pak určíme optimální řešení celku.
- Výše uvedenou rovnost lze ještě zjednodušit (uvažujeme $r_0 = 0$):

$$r_n = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i, r_{n-i})$$

Rekurzivní řešení

CUT-ROD(p, n)

```

1  if  $n == 0$ 
2      return 0
3   $q = -\infty$ 
4  for  $i = 1$  to  $n$ 
5       $q = \max(q, p[i] + \text{CUT-ROD}(p, n - i))$ 
6  return  $q$ 

```

$$T(n) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} T(j) .$$

$$T(n) = 2^n$$

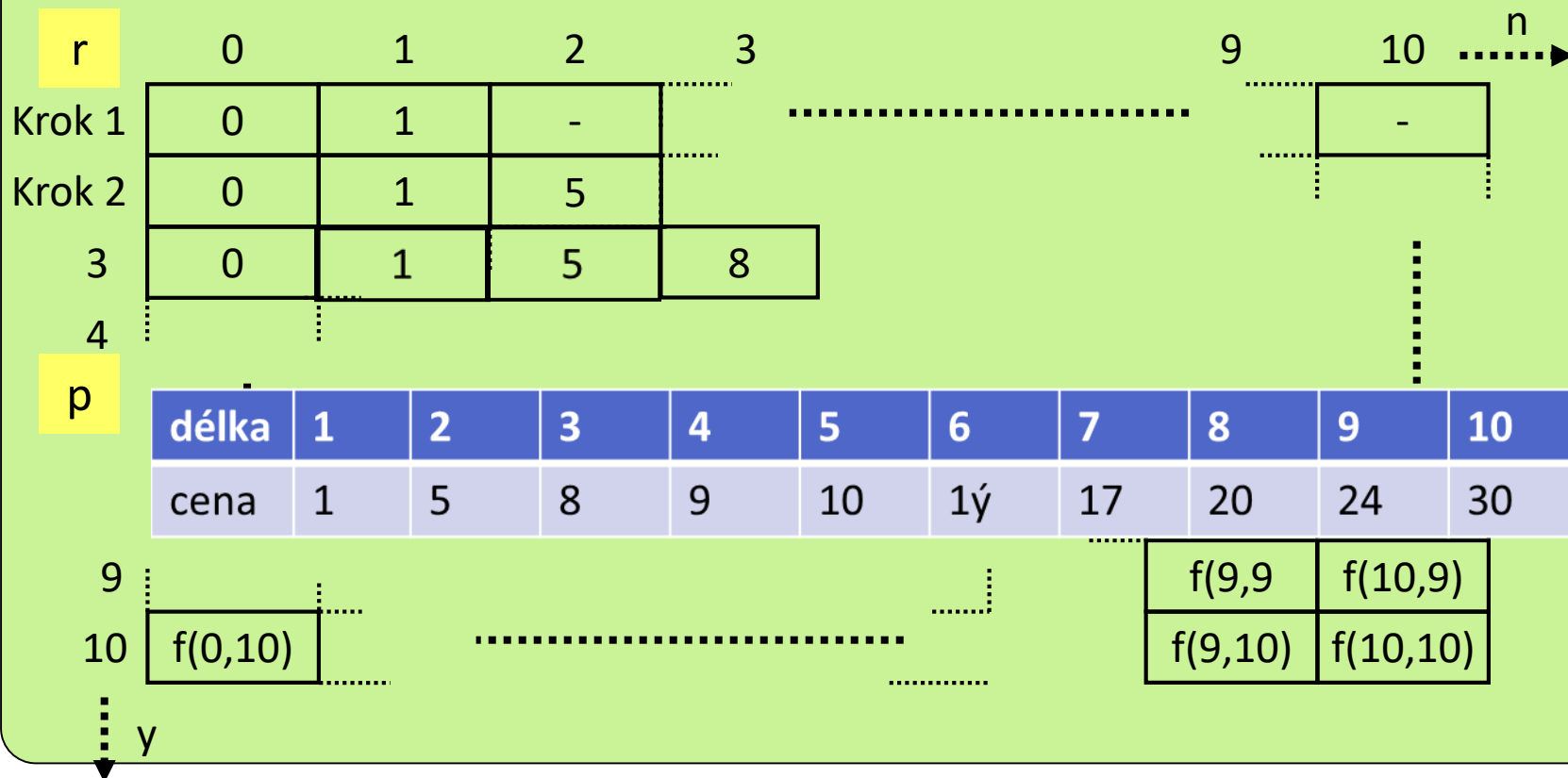
```

public static int cut_rod(int p[], int n) {
    int q;
    if (n == 0) return 0;
    q = MIN_VALUE;
    for (int i = 1; i < n; i++){
        q = Math.max(q, p[i]+cut_rod(p,n-i));
    };
    return q;
};

```


Řešení dynamickým programováním

$$r_n = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i, r_{n-i})$$



Řešení pomocí dynamického programování

BOTTOM-UP-CUT-ROD(p, n)

```

1  let  $r[0..n]$  be a new array
2   $r[0] = 0$ 
3  for  $j = 1$  to  $n$ 
4       $q = -\infty$ 
5      for  $i = 1$  to  $j$ 
6           $q = \max(q, p[i] + r[j - i])$ 
7       $r[j] = q$ 
8  return  $r[n]$ 

```

$\Theta(n^2)$:

```

public static int bottom_up_cut_rod(int p[], int n) {
    int q = 0; int r[] = new int[n];
    r[0] = 0;
    for (int j = 1; j < n; j++){
        q = MIN_VALUE;
        for (int i = 1; i < j; i++){
            q = Math.max(q, p[i]+r[j-i]);
        };
        r[j] = q;
    };
    return q;
};

```

Příklady úloh vhodných pro řešení metodou DP

- Floydův algoritmus hledání nejkratších cest v grafech.
- Optimální plánování výpočetních úloh, zadaných časovými intervaly, ve kterých mohou běžet.
- Výpočet Levenshteinovy vzdálenosti mezi 2 textovými řetězci.
- Určení způsobu, jak nejlépe daný řetězec vygenerovat pomocí dané bezkontextové gramatiky.
- Hledání nejdelšího společného podřetězce dvou řetězců.
- Optimální triangularizace konvexního mnohoúhelníku.
- Problém obchodního cestujícího:
 - Obecný případ v exponenciálním, ale $O(n!)$ čase.
 - Spec. případy v polynomiálním čase.
- ...

The End