Pravděpodobnost, proč je to tak těžké?

Tomáš Svoboda and Petr Pošík

Vision for Robots and Autonomous Systems, Center for Machine Perception
Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague

15. března 2023

Notes

Specializovaný předmět na pravděpodobnost a statistiku teprve přijde.

Outline

- Mathematics of uncertainty
- Random Experiment, Outcomes, Sample Space, Events, . . .
- Probability, Conditional Probability, Independence
- Random Variable, Expectation

Notes

Pravděpodobnost (nejistota) je všude

- Pravděpodobnost srážek zítra je 70%.
- Jakou mám šanci vyhrát v loterii?
- Mám pozitivní test na nemoc X, jsem opravdu nemocný?
- Svědectví jsou X, Y, a Z, je obviněný vinen?
- Nezaměstnanost se změnila o X, jaká bude inflace?
- Jak se bude vyvíjet cena akcií?
- Vybraná akce je X, o kolik se robot pohne?
- Jaká je pravděpodobnost, že na fotce je osoba XY?
- Jak dlouho mi bude trvat cesta, když pojedu tramvají?
- ...

Potřebujeme matematický popis ...

Notes

(Náhodný) pokus

Experiment :

- Vaguely: the act of observing certain feature of the world
- A procedure that
  - can be repeated many times under the same conditions and
  - has a well-defined set of possible outcomes.
- Deterministic experiment has only a single possible outcome.
- Random experiment has more than one possible outcomes.
- Before executing random experiment, we do not know the actual outcome. After execution this uncertainty vanishes.

Notes

Příklad 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

Jaká je pravděpodobnost, že padne třikrát panna (Head)?

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \ldots$

Notes

Pro výpočet velikosti prostoru všech elementárních jevů někdy poslouží vhodný model. Tady např. to může být $n-$bitové binární číslo.

Vyjděme z množiny elementárních jevů - $HHH, HHT, \ldots, TTT$.

Je pravděpodobnost některého elementárního jevu větší nebo menší než u ostatních? Je to tak vždy?

Jak definovat jevy A, B, C? Nešlo by jev C definovat snáze, pomocí množinových operací a jiných elementárních jevů?

Jaká je jejich pravděpodobnost? Jak by se dala spočítat $P(C)$ pomocí již známých pstí?

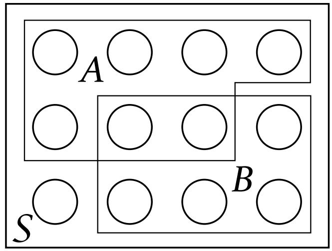
(Random) Events /(Náhodné) jevy/

Elementary events /elementární jevy/ are *all possible, mutually exclusive outcomes* of certain experiment.

The set of elementary events is called a sample space /množina elementárních jevů/ , denoted as $\mathcal{S}$.

An event /jev/ is any subset of the sample space, $A \subseteq \mathcal{S}$.

- Event A occured if the experiment outcome belongs to A.
- An event is any statement about the experiment outcome for which we can decide if it occured or not.

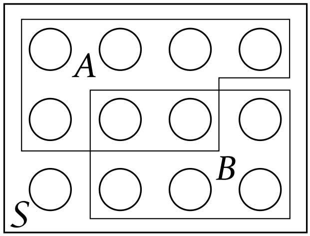


Notes

Naive probability (Bernoulli/Laplace)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\mathcal{S}|} = \frac{\text{number of outcomes favorable to } A}{\text{total number of outcomes in } \mathcal{S}}$$

- Limited to *equally likely* outcomes/elementary events. (*Equally likely?*)
- It does not allow for infinite sample spaces, geometric probability, ...
- *Combinatorics!* Counting (variations, permutations, combinations, ...)



Notes

"Equally likely": we actually use an assumption on probability values in the definition of the probability.

Events and their combinations

Important events:

- Certain event : $\mathcal{S}$, 1
- Impossible event : $\emptyset$, 0

Event combinations:

- Conjunction (A and B): $A \cap B$
- Disjuction (A or B): $A \cup B$
- Complementary event /jev opačný/ to A: $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- Disjoint events /jevy neslučitelné/ : $A_1, \ldots, A_n : \bigcap_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- Mutually exclusive events /Jevy po dvou neslučitelné = vzájemně se vylučující/ : $A_1, \ldots, A_n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Notes

Je to velmi podobné jako výroková logika „Při hodu kostkou hodím číslo 5 nebo 6“, „Nehodím liché číslo, ani číslo 6.“

Výrokovou logiku lze k popisu jevů použít místo množin, je to ekvivalentní popis. Je dobré ale obojí nemixovat.

Partition of sample space /Úplný systém jevů/

Partition of sample space $\mathcal{S}$ /Úplný systém jevů/ is composed of events $B_1, \ldots, B_n$ if they are *mutually exclusive* and $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathcal{S}$.

- The sample space $\mathcal{S}$ is its own partition by definition.
- Events $\{C, C^c\}$ form a partition: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

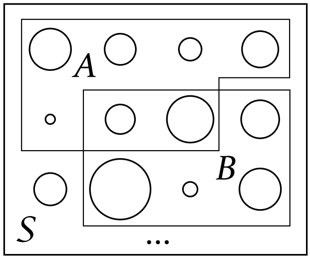
Notes

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Protože víme, že výsledkem experimentu je právě jeden z jevů v úplném systému. Proč?

Axiomatic probability (Kolmogorov)

- Sample space $\mathcal{S}$ may be infinite.
- Elementary events do not have to be equally likely.
- Axiomatic:
  1. state a set of constraints the probability function must obey
  2. find a function that fulfills them (next slides)

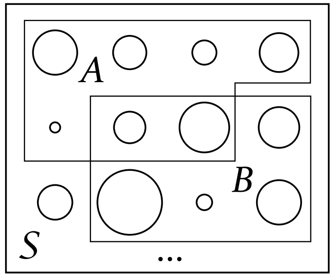


Notes

From discrete to continous, From Pebble world representation to Venn Diagrams.

Definition of probability

- Probability function /pravděpodobnostní funkce/ P is a function that assigns a real number between 0 and 1 to each event $A \subseteq \mathcal{S}$.
- P must satisfy the following axioms:



1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathcal{S}) = 1$
2. For any mutually exclusive events $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(n may be infinite)

Notes

Interpretations of probability

Frequentist :

- Relative frequency of an event after many repetitions of random experiment.

Bayesian :

- Degree of belief that an event occurs.
- This allows us to assign probabilities to statements like "candidate A wins elections" or "suspect X is guilty", although we cannot repeat the same elections or the same crime over and over.

Notes

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Notes

Pro názornost nám opět dobře poslouží oblázkový svět.

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou, $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A - padne 6, B - padne liché číslo.
Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodonost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Notes

Základní kontrola pravděpodobnosti libovolně složité události A: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Jak spočítat $P(A_1 \cap A_2)$? Existuje nějaký případ, kdy to lze spočítat snadno?

Properties of probability

For any valid probability function:

- $P(A) \in \langle 0, 1\rangle$ (definition)
- $P(\emptyset) = 0, \qquad P(\mathcal{S}) = 1$ (axioms)
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- If $A \subseteq B$, then $P(A) \leq P(B)$
- If $A \subseteq B$, then $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- If $A \cap B = \emptyset$, then $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*aditivity*)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Notes

Důkazy ponecháme specializovanějšímu předmětu. Intutivní náhled se snadno získá kreslením různých variant oblázkových světů, či Vennových diagramů.

Příklad 3: Pravděpodobnost částí

Vybereme-li z populace náhodně jednoho člověka, pak pro něj platí:

- Trpí nemocí X a je mladší 18 let s pravděpodobností 0.01.
- Trpí nemocí X a je mu/jí mezi 18 a 65 lety s pravděpodobností 0.05.
- Trpí nemocí X a je starší 65 let s pravděpodobností 0.09.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk má nemoc X?

Notes

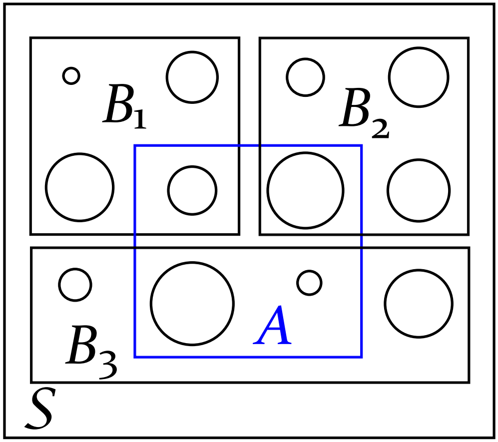
Properties of probability (cont.)

If $\{B_1, \dots, B_n\}$ is a partition of sample space then for any event $A \subseteq \mathcal{S}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \; .$$

In particular, for partition $\{C, C^c\}$

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c) \, .$$



Notes

Independent events /Nezávislé jevy/

Čerpadla u elektrárny, chtěli bychom, aby byla nezávislá Events A and B are independent if and only iff

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

If A, B are independent, then

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- and pairs A, B^c and A^c, B and A^c, B^c are independent too.

Notes

U čerpadel bychom například chtěli, aby byla připojena k různým zdrojům elektřiny. Ideálně třeba i různým zdrojem energie.

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- A - na první minci padla hlava
- B - na druhé minci padla hlava
- C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

A žádná skupina jevů

B dvojice (A, B), (B, C), (A, C)

C dvojice (A, B), (B, C), (A, C) i trojice (A, B, C)

D pouze trojice (A, B, C)

Notes

Mohou být dvojice (A, A) a (A, A^c) nezávislé?
Kdy pro (A, A) platí, že $P(A \cap A) = P(A)P(A) = P(A)$?
Kdy pro (A, A^c) platí, že $P(A \cap A^c) = P(A)P(A^c) = P(A)(1 - P(A))$?

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

A Voják

B Technik

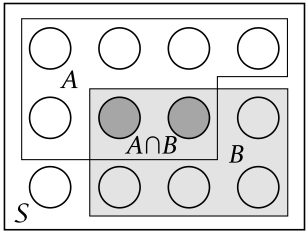
Notes

Nechť je identifikace povolání jev V a T. Můžeme zobecnit na hypotézu V, buď platí $H = V$ nebo $H = T$. Daný popis osobnosti nechť je E jako evidence.
Podle Sčítání 2021 je v ČR cca 22 tis. zaměstnanců v ozbrojených silách a cca 860 tis. technických a odborných pracovníků.
Diskutujme, podle čeho jsme se rozhodovali. Nakresleme diagram s jevy V a T, znázorníme v obou jevech části, kdy platí i E.

Conditional probability

Conditional probability of event A given event B is defined as

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0.$$



- All probabilities are conditional: $P(A) = P(A|\mathcal{S})$.
- Interpretation:
  1. $P(A)$ is our current belief that event A occurs.
  2. We get a new information that a different event B occured.
  3. $P(A|B)$ is now our updated belief about A.
- Conditional probability is still a probability: it maps any event $A \subseteq \mathcal{S}$ to $\langle 0, 1 \rangle$.

Notes

Properties of Conditional Probability

- $P(\mathcal{S}|B) = 1$, $P(\emptyset|B) = 0$.
- $P(A|A) = 1$, $P(A^c|A) = 0$.
- If $B \subseteq A$, then $P(A|B) = 1$.
- If $P(A \cap B) = 0$, then $P(A|B) = 0$.
- If $A_1, \ldots, A_n$ are mutually exclusive events, then $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$.
- Events A, B are independent iff $P(A|B) = P(A)$ (if $P(A|B)$ is defined).

Notes

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A.
2. Dozvíme se, že nastal jev B.
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A.

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

A $P(A|B) < P(A)$

B $P(A|B) = P(A)$

C $P(A|B) > P(A)$

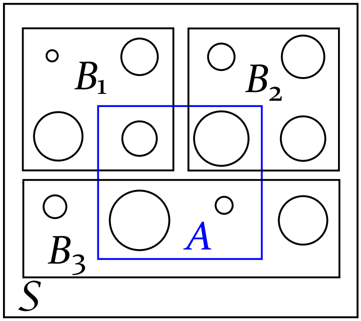
D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Notes

The Law of Total Probability

Let $B_1, \ldots, B_n$ be a partition of the sample space $\mathcal{S}$ (i.e., the B_i are disjoint events and their union is $\mathcal{S}$), with $P(B_i) > 0$ for all i.
Then

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$



Notes

Bayes rule

Probability of the intersection of two events A and B, $P(A \cap B)$, can be expressed in 2 ways:

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

From that it follows **Bayes rule**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Applying the law of total probability from previous slide:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum\limits_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}.$$

Notes

Vidíme, že se k Bayesově pravidlu můžeme dopracovat:

- vzpomenutím na problém odhadu povolání osoby na základě popisu, viz Vennův diagram
- ze symetričnosti výpočtu pravděpodobnosti průniku jevů/událostí

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné . . .

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- tři hlavy – $X(s) = 3$
- alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- . . .

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s.
Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

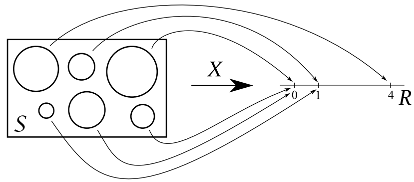
Notes

Lze uvažovat např. i o hodu 3 kostkami. Kolik existuje různých výsledků experimentu?
Jak je asi složité pracovat s jevy zahrnujícími stovky elementárních jevů?

Vidíme, že náhodná proměnná je ve skutečnosti funkce! Te je určitě jeden ze zdrojů zmatení.

Random Variable

Random variable (náhodná proměnná/veličina) on a probability space $(\mathcal{S}, P)$ is a function X mapping elementary events $s \in \mathcal{S}$ to real numbers $\mathbb{R}$, i.e., $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.



"Random variable is a numerical 'summary' of an aspect of the experiment."

- R.v. X assigns a numerical value $X(s)$ to each possible outcome $s \in \mathcal{S}$.
- The mapping is *deterministic*; the randomness comes from outcomes of random experiment (with outcome probabilities described by probability function P).
- Before the experiment, we know neither the value of s, nor the value of $X(s)$. But we can compute the probability that X will take on a given value, or a range of values.
- After the experiment, s was realized, and the r.v. crystalizes into value $X(s)$.

Notes

Náhodné jevy vs hodnoty náhodné proměnné

Let X be a random variable, i.e., $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

- $X = x$ denotes the event $\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}$, i.e., the event consisting of all outcomes s such that $X(s) = x$.
- $X \in \langle a, b)$ denotes the event $\{s \in \mathcal{S} : a \leq X(s) < b\}$, i.e., the event consisting of all outcomes s such that $a \leq X(s) < b$.

Notes

Discrete Random Variable

Random variable X is called discrete if the values of $X(s)$ for all $s \in \mathcal{S}$ form either

- a finite set of values $a_1, a_2, \ldots, a_n$, or
- an infinite set of countably many values $a_1, a_2, \ldots$

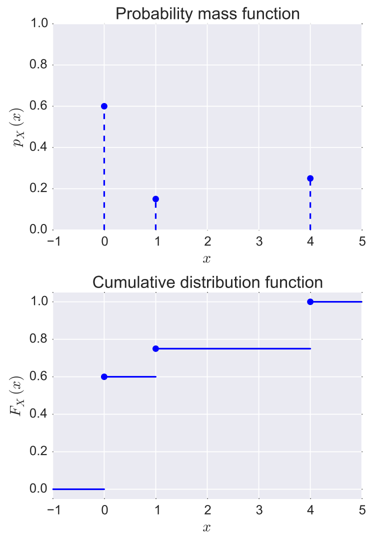
Support of X:
$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Probability Mass Function (PMF) /pstní fce/ of a discrete r.v. X is the function p_X given by

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$

Cumulative Distribution Function (CDF) /distribuční fce/ of a discrete r.v. X is the function F_X defined as

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p_X(t).$$



Notes

Nakreslete si jak to vypadá pro experiment hodu třemi mincemi a $X(s) =$ počet hlav.

Expected value

Před začátkem experimentu, kolik očekávám, že padne hlav?

Expected value (střední hodnota) of a discrete r.v. X is denoted as $\mathrm{E}\,X$ and is defined as

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

For equally probable outcomes $s \in \mathcal{S}$ also $\mathrm{E}\,X = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s)$.

Characteristics of $\mathrm{E}\,X$:

- $\mathrm{E}\,r = r$, $\mathrm{E}(\mathrm{E}\,X) = \mathrm{E}\,X$
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$, $\mathrm{E}(X + r) = \mathrm{E}\,X + r$, $\mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y$
- $\mathrm{E}(rX + sY) = r\,\mathrm{E}\,X + s\,\mathrm{E}\,Y$
- For *independent* r.v.s: $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$.

Notes

Očekáváná hodnota náhodné veličiny je často tím hlavním co nás zajímá.

References, further reading

Klasické české čtení [2], na domácí stránce https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/ mnoho dalších zajímavých studijních materiálů.

[1] Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang.
Introduction to Probability.
CRC Press, 2nd edition, 2019.
http://probabilitybook.net/.

[2] Mirko Navara.
Pravděpodobnost a matematická statistika.
ČVUT v Praze, Praha, 2007.
https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/.

[3] N. Silver.
Signál a šum.
Paseka, 2014.

Notes