

# B35APO: Architektury počítačů

## Lekce 02. Reprezentace čísel

Petr Štěpán

stepan@fel.cvut.cz



7. března, 2023

# Obsah

**1** Operace s celými čísly

2 Záporná čísla

3 Reálná čísla

# Opakování

V minulé lekci jsme měli:

- Reprezentace bitu pomocí napětí
- Reprezentace bajtů jako více paralelních vodičů, každý s hodnotou jednoho bitu
- Sčítání dvou celých kladných čísel
- Bitový posun celých čísel (násobení, nebo dělení mocninou 2)

Dnes:

- Rozsahy celých čísel a ukládání do paměti
- Násobení a dělení celých kladných čísel
- Reprezentace záporných čísel a operace s nimi
- Přetečení sčítání a odčítání
- Reálná čísla

## Kvíz

Jak rychle lze spočítat součet dvou  $n$ -bitových čísel a kolik k tomu potřebujeme tranzistorů?

- A v konstantním čase s lineárním počtem tranzistorů –  $O(n)$
- B v konstantním čase s exponenciálním počtem tranzistorů –  $O(2^n)$
- C v logaritmickém čase s lineárním počtem tranzistorů –  $O(n)$
- D v logaritmickém čase s kubickým počtem tranzistorů –  $O(n^3)$
- E v logaritmickém čase s exponenciálním počtem tranzistorů –  $O(2^n)$

# Kladná čísla

Reprezentace celých kladných čísel

V jazyce C jsou typy (podle normy ISO/IEC 9899:TC3):

typ	min	max	počet bajtů
unsigned char	0	255	1
unsigned short	0	65 535	2
unsigned long	0	4 294 967 295	4
unsigned long long	0	18 446 744 073 709 551 615	8

- Norma definuje většinou minimální rozsahy, `unsigned int` nemusí mít jen 2 bajty, ale většinou má 4 bajty (GNU, MS C).
- Pokud chcete zjistit skutečnou velikost, použijte např. příkaz `sizeof(int)`
- Doporučujeme používat typy `uintX_t` a `intX_t` (kde X je 8, 16, 32, nebo 64), např. `uint8_t`, `int64_t`
- V některých případech je vhodné použít typy `[u]int_fastX_t` a `[u]int_leastX_t`, např. `uint_least8_t`, `int_fast64_t`

# Kladná čísla

V zápis konstant v jazyce C v soustavě:

- desítkové – nesmí začínat 0 kromě 0
- osmičkové – začíná 0
- hexadecimální – začíná 0x
- binární – začíná 0b (pouze GNU překladač)

Příklad:  $252 == 0xfc == 0374 == 0b11111100$

Poznámka: Podle hexadecimálního zápisu zjistíte velikost čísla v bajtech, např. 0x123456 se vejde do tří bajtů.

# Kladná čísla - uložení v paměti

- Paměť počítače pracuje s bajty
- Historicky vzniklo několik možností uložení čísel do paměti.

Jak lze tedy uložit číslo 0x12345678 do paměti:

adresa	Big-endian	Little-endian
400	0x12	0x78
401	0x34	0x56
402	0x56	0x34
403	0x78	0x12

- Procesory Intel zavedly little-endian, procesory Motorola zavedly big-endian.
- Je to důležité, když získáte například přes internet data po bajtech, musíte definovat, jaká čísla reprezentují
- RISC V - little-endian, MIPS - big-endian
- Bitcoin - DER signatures big-endian, transaction hash little-endian

## Kladná čísla - kvíz

```
#include <stdio.h>
int main() {
    unsigned char p[] = {0,0,0,0};
    *(int*)p=10;
    printf("%02x,%02x,%02x,%02x\n", p[0],p[1],p[2],p[3]);
}
```

Co bude výstupem tohoto programu na procesorech Intel?

- A nic, program nelze přeložit
- B náhodný výstup, p nelze přetypovat na \*int
- C 0a,00,00,00
- D 00,00,00,0a



# Násobení celých čísel

Stejný princip násobení, jak jste se ho naučili na základní škole pro desítkovou soustavu:

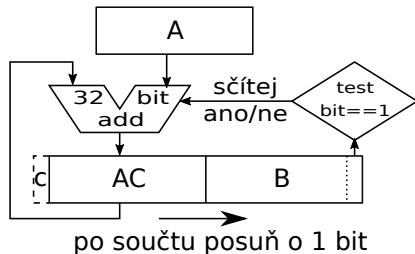
$$\begin{array}{r}
 153 \\
 *45 \\
 \hline
 765 \\
 612 \\
 \hline
 6885
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10011001 \\
 *101101 \\
 \hline
 10011001 \\
 00000000 \\
 10011001 \\
 10011001 \\
 00000000 \\
 10011001 \\
 \hline
 1101011100101
 \end{array}$$

# Násobení celých čísel

Podle uvedeného algoritmu můžeme vytvořit následující násobičku s posuvným registrem:

(A,B 32 bitů, výsledek 64 bitů)



- Výsledek je ve dvou registrech AC a B
- Pomalé, už sčítání je náročné, nyní 32 nebo 64 sčítání.

# Rychlé násobení - Motivace Wallace tree

Jak to zrychlit - odložené carry (Carry Save Adder).

Jak nejrychleji spočítat součet čtyř 32-bitových čísel:

$$\begin{array}{r}
 \boxed{w_{31} \dots w_4 w_3 w_2 w_1 w_0} \\
 + \boxed{x_{31} \dots x_4 x_3 x_2 x_1 x_0} \\
 + \boxed{y_{31} \dots y_4 y_3 y_2 y_1 y_0} \\
 + \boxed{z_{31} \dots z_4 z_3 z_2 z_1 z_0} \\
 \hline
 \boxed{p_{31} \dots p_4 p_3 p_2 p_1 p_0} \\
 \boxed{c'_{31} c'_{30} \dots c'_3 c'_2 c'_1 c'_0} \\
 \boxed{z_{31} \dots z_4 z_3 z_2 z_1 z_0} \\
 \hline
 \boxed{c_{31} q_{31} \dots q_4 q_3 q_2 q_1 q_0} \\
 \boxed{c_{31} c_{30} \dots c_3 c_2 c_1 c_0} \\
 \hline
 s_{33} s_{32} s_{31} \dots s_4 s_3 s_2 s_1 s_0
 \end{array}$$

- Sečteme paralelně  $p=w+x$  a  $q=y+z$  a potom  $p+q$  – trvá dlouho, nejméně doby dvou plných součtů
- Odložíme carry (nebudeme carry propagovat, jen v posledním kroku):
  - 1. krok použijeme Full adder a sečteme vždy bity  $w_i + x_i + y_i = c'_i p_i$
  - 2. krok použijeme Full adder a sečteme vždy bity  $p_i + c'_{i-1} + z_i = c_i q_i$
  - 3. krok použijeme normální sčítačku 32-bitových čísel ( $s_0 = q_0$ ,  $c'_3 2$  připojíme ke  $q$ )

# Rychlé násobení - Wallace tree

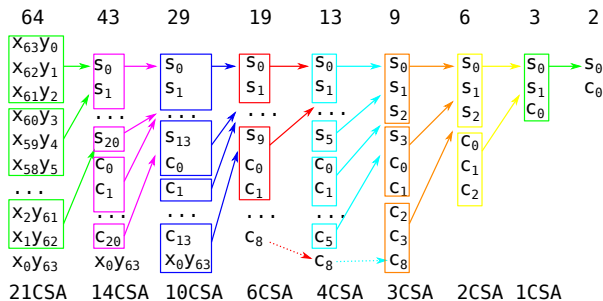
Použijeme předchozí princip na co nejrychlejší součet 32 nebo 64 různých čísel:

$$\begin{array}{r}
 x_{63} \dots x_4 x_3 x_2 x_1 x_0 * y_{63} \dots y_4 y_3 y_2 y_1 y_0 \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & \cdot & x_{63}y_0 & \cdot & x_2y_0 & x_1y_0 & x_0y_0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & x_{62}y_1 & \cdot & x_1y_1 & x_0y_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdot & x_{61}y_2 & \cdot & x_0y_2 & 0 & 0 \\
 & \dots & & \cdot & \dots & \cdot & & \dots & \\
 0 & 0 & x_{63}y_{61} & \cdot & x_2y_{61} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 0 & x_{63}y_{62} & x_{62}y_{62} & \cdot & x_1y_{62} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
 x_{63}y_{63} & x_{62}y_{63} & x_{61}y_{63} & \cdot & x_0y_{63} & \cdot & 0 & 0 & 0
 \end{array} \\
 \hline
 q_{127} & q_{126} & q_{125} & q_{124} & q_{63} & q_2 & q_1 & q_0
 \end{array}$$

- Součiny jsou jednoduché:  
 $x_i \cdot y_j = x_i$  and  $y_j$
- Nejtěžší je sečíst  
prostřední sloupec 64  
jednobitových čísel
- Pustíme na všechny bity  
co můžeme paralelně  
sčítačky a carry budeme  
přičítat v dalších krocích
- V první fázi to bude  
1323 sčítaček

# Rychlé násobení - Wallace tree

Když se podíváme jen na prostřední nejdelší sloupec:



- Vidíme, že za 8 kroků sčítaček, tedy 16 zpoždění hradel nám zbývá sečíst dva bity
- Vpravo od tohoto sloupce je již vše sečteno a již se i propagovali všechny carry
- Zbývá sečíst dvě 64-bitová čísla (součty a carry), což se dá stihnout také za 16 zpoždění hradel
- Výsledek - vynásobíme dvě čísla za cenu doby odpovídající dvou součtům

# Dělení celých čísel

Dělení lze zkonstruovat podobně, jako jste se učili na základní škole:

$$\begin{array}{r}
 240 : 11 = 21 \\
 -22 \\
 \hline
 20 \\
 -11 \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

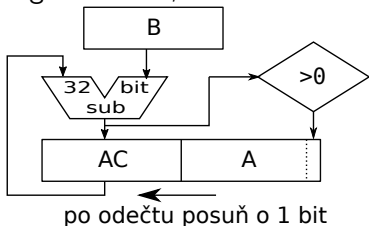
$$\begin{array}{r}
 11110000 : 1011 = 10101 \\
 -1011 \\
 \hline
 1000 \\
 10000 \\
 -1011 \\
 \hline
 1010 \\
 10100 \\
 -1011 \\
 \hline
 1001
 \end{array}$$

Oba výpočty počítají, že 240 děleno 11 je 21 a zbytek neboli  $240 \% 11 = 9$ .

# Dělení celých čísel

Dělička počítající  $A/B$ ,  $A$  má 64 bitů,  $B$  32 bitů:

číslo  $A$  je uloženo ve dvou registrech  $AC, A$



- Výsledek: v registru  $A$  je podíl, v registru  $AC$  je zbytek – modulo
- v posledním kroku je nutné posunout pouze registr  $A$ ,  $AC$  se již neposouvá – promyslete proč
- Dělička – existuje rychlejší algoritmus High Radix Division (je velmi složitý, přesahuje rozsah tohoto předmětu)
  - Odhaduje několik bitů na jednou a pak upřesňuje iteracemi
  - 1994 – Pentium FDIV bug – chyba při implementaci algoritmu Sweeney, Robertson, and Tocher (SRT) - odhaduje dva bity

# Obsah

1 Operace s celými čísly

**2 Záporná čísla**

3 Reálná čísla



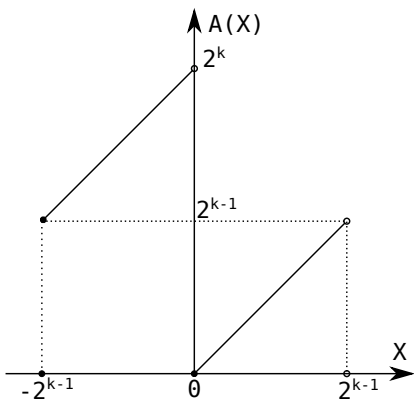
# Záporná čísla

Potřebujeme zakódovat znaménko do reprezentace čísla:

- naivně - vrchní bit bude znaménko
  - Máme 0 a -0, přitom je to stejné číslo
  - Potřebujeme jiný algoritmus na sčítání
- dvojkový doplněk – two complement
  - reprezentace  $X$   $k$ -bitovým číslem je vlastně  $X \bmod 2^k$ 
    - pro  $X \geq 0$  je reprezentace  $X$
    - pro  $X < 0$  je reprezentace  $2^k - |X|$
  - výhoda: sčítání funguje tak, jak jsme si ho navrhli pro všechna čísla, kladná i záporná.
  - 8-bitová -1 je 11111111
  - $5+(-1)$  je  $101+11111111=100000100$ , devátý bit se do reprezentace čísla nevejde, tedy výsledek je  $101+11111111=100$

# Dvojkový doplněk

- rozsah čísel reprezentovaných  $k$ -bity je  $\langle -2^{k-1}, 2^{k-1} - 1 \rangle$
- pro číslo  $X$  budeme značit  $A(X)$  jeho reprezentaci v dvojkovém doplňku:



Binární hodnota	Dvojkový doplněk
<b>00000000</b>	$0_{(10)}$
<b>00000001</b>	$1_{(10)}$
...	...
<b>01111110</b>	$126_{(10)}$
<b>01111111</b>	$127_{(10)}$
<b>10000000</b>	$-128_{(10)}$
<b>10000001</b>	$-127_{(10)}$
<b>10000010</b>	$-126_{(10)}$
...	...
<b>11111101</b>	$-3_{(10)}$
<b>11111110</b>	$-2_{(10)}$
<b>11111111</b>	$-1_{(10)}$

# Opačné číslo

- Protože sčítání funguje s dvojkovým doplňkem, tak nemusíme navrhovat obvod pro odčítání, jednoduše  $A-B$  vypočteme jako  $A+(-B)$
- potřebujeme vymyslet jak získat z  $B$  hodnotu  $-B$ 
  - víme, že záporné  $X = 2^k - |X|$
  - pokud znegujeme každý bit, tak je to vlastně  $(2^{k-1} - 1) - X$ , protože  $2^{k-1} - 1$  je číslo složené z  $k$  jedniček
- Výsledný postup je tedy:
  - 1 znegujte všechny bity čísla  $X$
  - 2 k výslednému číslu přičti 1

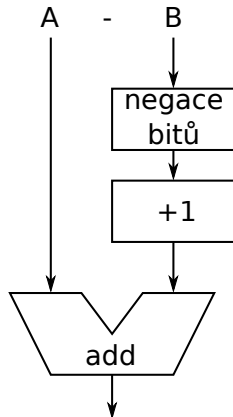
Příklad:

$53=0b00110101$  znegováním cifer dostaneme  $-54=0b11001010$  po přičtení 1 pak  $-53=0b11001011$

# Odčítání

Odčítání lze řešit:

- speciálním obvodem podobným sčítačce se všemi možnostmi zrychlení jako byly u sčítání
- nebo z druhého čísla vytvoříme číslo opačné a to pak jednoduše sečteme s tím prvním



# Násobení a dělení

- pro násobení lze odvodit, že pokud bychom ignorovali znaménko a spočítali  $M \cdot N$ , pak pro  $M, N$  obě  $k$ -bitová čísla musíme výsledek upravit takto:

$$\begin{aligned}
 A(M \cdot N) &= A(M) \cdot A(N) \\
 &\quad -A(M) \cdot 2^k \quad \text{pokud } M < 0 \\
 &\quad -A(N) \cdot 2^k \quad \text{pokud } N < 0
 \end{aligned}$$

- protože reprezentace záporného čísla dvojkovým doplňkem je vlastně  $A(M) = 2^k + M$ , pak součin dvou záporných čísel je  $(2^k + M) \cdot (2^k + N) = 2^{2 \cdot k} + 2^k \cdot M + 2^k \cdot N + M \cdot N$
- moderní násobení a dělení počítá s absolutními hodnotami a nakonec určíme znaménko výsledku podle znaménka operandů.
  - nejvyšší bit značí znaménko
  - výpočet opačného čísla je rychlý a levný

# Čísla se znaménkem

Reprezentace celých čísel

V jazyce C jsou typy:

typ	min	max	počet bajtů
char	-128	127	1
short	-32 768	32 767	2
long	-2 147 483 648	2 147 483 647	4
long long	-9 223 372 036 854 775 808	9 223 372 036 854 775 807	8

- Norma C má ve skutečnosti min o 1 větší , kvůli procesorům s jedničkovým doplňkem – ten se dnes již prakticky nepoužívá
- Stejně tak int musíte otestovat, zda je 2 bajtový nebo 4 bajtový

# Kvíz

Uvažujte tento program:

```
#include <stdio.h>
int main() {
    unsigned char a=150u, b=120u, c;
    char sa=-100, sb=-80, sc;

    c=a+b;
    sc=sa+sb;
    printf("c=%u sc=%d\n", c, sc);
}
```

Co program vytiskne:

- A c=270 sc=-180
- B c=14 sc=-76
- C c=14 sc=76
- D c=-14 sc=-76
- E Numeric error

## Přetečení při sčítání čísel bez znaménka

Pokud se podíváme co se stalo, unsigned char je 8-bitová reprezentace čísel:

$$\begin{array}{r}
 150 = 1001\ 0110 \\
 +120 = 0111\ 1000 \\
 \hline
 270 = 1\ 0000\ 1110 \\
 14 = 0000\ 1110
 \end{array}$$

Protože se výsledek nevejde do 8-bitů, nejvyšší jednička se ztratí a výsledek je pouze 14.

Pokud přetečení chcete detekovat, máte následující možnosti:

- C23 `bool ckd_add(type1 *result, type2 a, type3 b)` – součet dvou čísel s detekcí přetečení
- GNU GCC 5+, Clang 3.8+ `__builtin_add_overflow(a, b, result)` – obě verze i pro sub a mul



# Přetečení při sčítání čísel se znaménkem

Přetečení při sčítání čísel se znaménkem je složitější. Co je dobře a co je špatně:

$$-112 = 10010000$$

$$+ 45 = 00101101$$

---


$$-67 = 10111101$$

$$-12 = 11110100$$

$$+ -20 = 11101100$$

---


$$-32 = 111100000$$

$$-90 = 10100110$$

$$+ -42 = 11010110$$

---


$$124 = 101111100$$

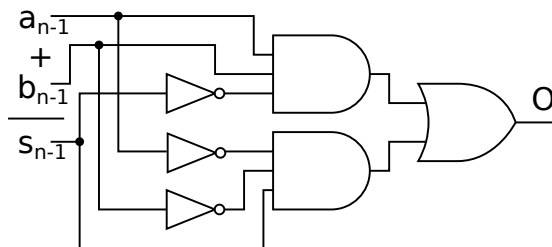
DOBŘE

DOBŘE

ŠPATNĚ

- Přetečení při sčítání čísel se znaménkem nastane právě tehdy, když dojde k přenosu na posledních cifrách a zároveň nedojde k přenosu na předposledních cifrách:
  - $\text{overflow} = c_n \text{ xor } c_{n-1}$ ;  $c_n$  je nejvyšší carry,  $c_{n-1}$  je druhé nejvyšší carry
- Druhá možnost je sledovat, zda při součtu dvou kladných čísel máme záporný výsledek, nebo při součtu dvou záporných čísel je kladný výsledek:
  - $\text{overflow} = (a_n \text{ and } b_n \text{ and } (\text{not } s_n)) \text{ or } ((\text{not } a_n) \text{ and } (\text{not } b_n) \text{ and } s_n)$ ;  $a_n, b_n$  jsou nejvyšší bity sčítanců;  $s_n$  je největší bit výsledku

## Kvíz



Při sčítání dvou čísel s odlišnými znaménky:

- A může dojít k přetečení jen v dvojkovém doplňku
- B může dojít k přetečení pouze při jiné reprezentaci než je dvojkový doplněk
- C nemůže dojít pouze při reprezentaci v dvojkovém doplňku
- D nemůže dojít v žádné reprezentaci čísel se znaménkem

# Jiné reprezentace záporných čísel

Čísla s posunutou nulou:

- pro  $k$ -bitovou reprezentaci zvolíme číslo  $S$  (většinou  $S = 2^{k-1}$  nebo  $S = 2^{k-1} - 1$ )
- reprezentace – kód čísla  $X$  je  $A(X) = X + S$
- rozkódování je funkcí  $D(A) = A - S$
- rozsah čísel reprezentovaných je  $< -S, 2^k - S - 1 >$

Pro  $k=8$  a  $S=127$

Binární hodnota	Hodnota
00000000	$-127_{(10)}$
00000001	$-126_{(10)}$
...	...
01111110	$-1_{(10)}$
01111111	$0_{(10)}$
10000000	$1_{(10)}$
10000001	$2_{(10)}$
...	...
11111110	$127_{(10)}$
11111111	$128_{(10)}$

# Počítání s posunutou nulou

- sčítání a odčítání čísel s posunutou nulou je složitější:
- $A(X + Y) = (X + Y) + S = (X + S) + (Y + S) - S = A(X) + A(Y) - S$
- $A(X - Y) = (X - Y) + S = (X + S) - (Y + S) + S = A(X) - A(Y) + S$
- násobení je ještě složitější:
- $A(X \cdot Y) = (X \cdot Y) + S = (X + S) \cdot (Y + S) - (X + S + Y + S) \cdot S + S^2 + S = A(X) \cdot A(Y) - (A(x) + A(y)) \cdot S + S^2 + S$
- Přetečení:
  - při sčítání jsou znaménka sčítanců stejná a výsledek má jiné znaménko
  - při odčítání čísel s různými znaménky má výsledek jiné znaménko než menšenec

# Jiné reprezentace záporných čísel

Doplňěk jedné:

- záporné číslo je negací bitů opačného čísla
  - pro  $X \geq 0$  je reprezentace  $A(X) = X$
  - pro  $X < 0$  je reprezentace  $A(X) = 2^k - 1 - |X|$
- nevýhody: dvě reprezentace 0, složitější sčítání čísel se znaménky

BCD formát

- jiná reprezentace celých čísel, každá cifra jeden nibble
  - číslo 1234 je uloženo v hexadecimálním tvaru jako 0x1234
- výhody: snadný převod na desítkovou soustavu
- nevýhody: neefektivní reprezentace, složitější počítání

# Obsah

1 Operace s celými čísly

2 Záporná čísla

**3 Reálná čísla**



# Reálná čísla s pevnou desetinnou čárkou

Čísla s pevnou desetinnou čárkou (fixed point numbers):

- obdoba čísel s posunutou 0
- reálné číslo je reprezentované  $k$ -bitovým celým číslem se znaménkem, dále zvolíme pevný počet desetinných míst  $s$  bitů, kdy  $0 \leq s \leq k$
- reprezentace – kód čísla  $X$  je  $A(X) = \lceil X \cdot 2^s \rceil$
- rozkódování je funkcí  $D(A) = \frac{A}{2^s}$
- rozsah čísel reprezentovaných je  $\left\langle -\frac{2^{k-1}}{2^s}, \frac{2^{k-1}-1}{2^s} \right\rangle$
- přesnost reprezentace čísel je  $\pm \frac{1}{2^s}$ .

Speciální případ:

- pokud chcete reprezentovat reálná čísla z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$
- pak můžete nastavit  $s = k$  a použít bezznaménkovou reprezentaci celých čísel
- dosáhnete lepší přesnosti než odpovídající float, nebo double

Některé SIMD instrukce používají pevnou desetinnou čárku.



# Reálná čísla s pevnou desetinnou čárkou

Počítání s čísly s pevnou desetinnou čárkou:

- součet a rozdíl je součtem a rozdílem celočíselné reprezentace čísel
- násobení je složitější:
  - $A(X \cdot Y) = (X \cdot Y) \cdot 2^s = \frac{(X \cdot 2^s) \cdot (Y \cdot 2^s)}{2^s} = \frac{A(X) \cdot A(Y)}{2^s}$
- dělení je obdobné:
  - $A\left(\frac{X}{Y}\right) = \left(\frac{X}{Y}\right) \cdot 2^s = \frac{(X \cdot 2^s) \cdot 2^s}{(Y \cdot 2^s)} = \frac{A(X) \cdot 2^s}{A(Y)}$
- Nejedná se o výrazné zesložnění, protože násobení číslem  $2^s$  je posun o  $s$  bitů doleva a dělení číslem  $2^s$  je posun o  $s$  bitů doprava.

# Plovoucí desetinná čárka

Plovoucí desetinná čárka (floating point numbers)

Obdoba vědeckého zápisu reálných čísel:

$$-123000000000000.0 = -1.23 \cdot 10^{14} = -1.23E14$$

$$0.000000000000123 = -1.23 \cdot 10^{-13} = -1.23E - 13$$

Binární reprezentace používá obdobně mocninu 2:

$$11011000000000.0 = 1.1011 \cdot 2^{14} = 1.1011E14 = 29696_{10}$$

$$\begin{aligned} -0.0000000000000011101 &= -1.1101 \cdot 2^{-16} = -1.1101E - 16 \approx \\ &\approx 0.00002765_{10} \end{aligned}$$

Všimněte si, že každé reálné číslo (kromě 0) začíná v binárním vědeckém zápisu jedničkou.

# IEEE-754

Standard IEEE-754 definuje, jakým způsobem zakódovat reálné číslo do 32, 64 bitů.

Reálné 32-bitové číslo obsahuje:

- 1 bit znaménko (pozn. existuje 0 i -0)
- 8 bit hodnota exponentu s posunutou nulou o 127
- 23 bitů hodnota mantisy, tedy cifer reprezentujících hodnotu

Reálné 64-bitové číslo obsahuje:

- 1 bit znaménko (pozn. existuje 0 i -0)
- 11 bitů hodnota exponentu s posunutou nulou o 1023
- 52 bitů hodnota mantisy, tedy cifer reprezentujících hodnotu

## IEEE-754

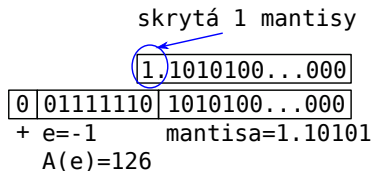
Příklad: Reálné číslo  $0.828125_{(10)} = 0.5 + 0.25 + 0.0625 + 0.015625 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} = 0.110101_{(2)}$ .

Číslo převedeme do vědecké notace:  $0.110101 = 1.10101E - 1$ .

Exponent  $e = -1$ , reprezentace s posunutou nulou o 127 je

$$A(-1) = -1 + 127 = 126.$$

Abychom neplýtvali zbytečně bity, pro normalizovaná čísla se první 1 mantisy neukládá do binární reprezentace čísla:



Zkuste si

<https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html>

# IEEE-754

Normalizované číslo, je každé číslo, které lze zapsat jako  $1.XXXXX E \text{ exp}$ , kde  $\text{exp}$  je číslo od  $-126$  do  $127$ , tedy jehož reprezentace je od  $1$  do  $254$ .

Denormalizovaná čísla jsou čísla, která lze zapsat jako  $0.XXXXX E -126$ , tedy například  $0.0$ , nebo všechna čísla v intervalu  $(-1.17549E - 38, 1.17549E - 38)$ , tedy od  $(-2^{-126}, 2^{-126})$ .

Pokud je reprezentace exponentu nastavena na samé  $1$ , tedy  $255$ , tzn. hodnota exponentu je  $128$ , pak se jedná o speciální čísla.

- pokud je mantisa  $0$ , pak se jedná o nekonečno, podle znaménka *-inf*, nebo *inf*.
- pokud je mantisa nenulová, pak se jedná o speciální výraz *NaN* – Not a Number, tedy chybná hodnota čísla, například po výpočtu odmocniny záporného čísla

## IEEE-754

Přehled reálných čísel:

Exponent	Mantisa	Hodnota
00000000	0	0.0 – čistá nula
00000000	nenulová	Denormalizovaná čísla blízka 0
00000001	0	nejmenší normalizované číslo se skrytou 1 v mantise
1 až 254	cokoliv	normalizovaná čísla, skrytá 1 v mantise
11111111	0	nekonečno
11111111	nenulová	NaN chybná hodnota

Denormalizované číslo s nejmenší absolutní hodnotou různé od 0 je:

- exponent = 0 (-126), mantisa=000...0001, hodnota =  $2^{-23+(-126)} \approx 1.4E - 45$

Normalizované číslo s nejmenší absolutní hodnotou:

- exponent = 1 (-126), mantisa=000...0000, hodnota =  $2^{-126} \approx 1.17E - 38$

Normalizované číslo s největší absolutní hodnotou:

- exponent = 255 (127), mantisa=111...1111, hodnota =  $(2 - 2^{-23})2^{127} \approx 3.4E38$

# IEEE-754 revize 2008

Standard IEEE-754 navíc definuje reálné číslo s 16 bity (half precision) a s 128 bity (quad precision).

Reálné 16-bitové číslo obsahuje:

- 1 bit znaménko
- 5 bitů hodnota exponentu s posunutou nulou o 15
- 10 bitů hodnota mantisy, (plus 11tý bit skrytý neukládáný)

Reálné 128-bitové číslo obsahuje:

- 1 bit znaménko
- 15 bitů hodnota exponentu s posunutou nulou o 16383
- 112 bitů hodnota mantisy, (plus 113 bit skrytý)

# IEEE-754

Porovnání reálných čísel na velikost:

- Kladná čísla jsou vždy větší než záporná
- Po odstranění znamének, lze absolutní hodnoty čísel porovnat tak, jak jsou uloženy v paměti jako celé číslo bez znaménka
  - To je možné díky zvolené reprezentaci exponentu jako čísla s posunutou nulou
  - Větší exponent větší číslo, při rovnosti exponentů větší mantisa znamená větší číslo



## IEEE-754

Sčítání nebo odčítání dvou reálných čísel ve vědecké notaci

- 1 Převést mantisy čísel na společný exponent, který má hodnotu největšího exponentu (porušíme notaci)
- 2 Provést součet, nebo rozdíl mantis i se skrytými jedničkami
- 3 Výsledné číslo normalizovat
  - při sčítání se může exponent zvětšit
  - při odčítání se exponent může zmenšit

## IEEE-754

Příklad: Sčítání dvou reálných čísel  $31.5+0.75$

$$31.5_{(10)} = 11111.1_{(2)} = 1.11111E4 \quad 0.75_{(10)} = 0.11_{(2)} = 1.1E - 1$$

Obě čísla převedeme na stejný exponent 4 a sečteme:

$$\begin{array}{r} 1.11111 \\ 0.000011 \\ \hline 10.000001 \end{array}$$

Výsledné číslo musíme znormalizovat zvýšením exponentu na 5 a tím posunutím desetinné čárky vlevo:

$$10.000001E4 = 1.0000001E5$$

Toto číslo je reprezentací čísla 32.25.

# IEEE-754 – Násobení

Násobení dvou reálných čísel:

- 1 Exponent výsledku je součet exponentů čísel
- 2 Mantisa výsledku je součin mantis čísel (i se skrytými jedničkami)
- 3 Výsledné číslo normalizovat
  - podle výsledku násobení mantis je někdy nutné zvýšit exponent o 1 a vyrotovat mantisu doprava

## IEEE-754 – Násobení

Příklad: Vynásobíme čísla  $0.375 \cdot 1.5$

$$0.375_{(10)} = 0.011_{(2)} = 1.1E - 2 \quad 1.5_{(10)} = 1.1_{(2)} = 1.1E0$$

Součin mantis je:

11 odpovídá 1.1

\*11 odpovídá 1.1

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 11 \\ 11 \end{array}$$

1001 odpovídá 10.01 protože výsledek má dvě desetinná čísla  
Exponent vychází  $-2 + 0 = -2$ , ale výsledek součinu mantis potřebujeme normalizovat, neboli zvětšit exponent o 1 na  $-1$ .

Tím dostáváme výsledek  $10.01E - 2 = 1.001E - 1$  což je správný výsledek  $0.5625_{(10)}$

# IEEE-754

## Reálná čísla shrnutí:

- reálná čísla s plovoucí čárkou umí reprezentovat čísla ve velmi velkém rozsahu:
  - float – absolutní hodnota čísel od  $1.175494351E - 38$  do  $3.402823466E + 38$
  - double – absolutní hodnota čísel od  $2.2250738585072014E - 308$  do  $1.7976931348623158E + 308$
- přesnost čísla se udává na počet validních cifer:
  - float – v desítkové soustavě 6-7 platných cifer
  - double – v desítkové soustavě 15-16 platných cifer

POZOR: Následující while cyklus neskončí:

```
float a=1.0, step=5e-8;
while (a*a<1.01) {
    a+=step;
}
```

# Bonusový bod

Jaká je dekadická hodnota 8-bitového čísla se znaménkem, jehož reprezentace v paměti je dána bajtem 0xFE?

- A 254
- B -0
- C -1
- D -2