

Optimalizace

Celočíselné LP

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2023 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Celočíselné lineární programování (ILP)

Celočíselný LP

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

LP s binárními proměnnými

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n\}$$

LP relaxace poslední úlohy je úloha

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in [0, 1]^n\}$$

- Je-li původní úloha přípustná, LP relaxace je také přípustná
- Optimální hodnota LP relaxace je dolním odhadem optimální hodnoty původní úlohy

Mezera celočíselnosti je podíl pravé a levé strany:

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in [0, 1]^n\} \leq \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n\}$$

Optimální řešení LP relaxace

- Jen výjimečně je to i optimální řešení původní úlohy
- Někdy umožní sestavit řešení s požadovanou přesností
- Pro některé úlohy je opt. hodnota LP relaxace nicneříkající

Příklad

Hledáme vzájemně jednoznačné přiřazení učitelů k předmětům, které bude maximalizovat skóre:

Table 20.3 Evaluation of Teachers' Performances

	Course 1	Course 2	Course 3	Course 4	Course 5
Teacher 1	7	5	4	4	5
Teacher 2	7	9	7	9	4
Teacher 3	4	6	5	8	5
Teacher 4	5	4	5	7	4
Teacher 5	4	5	5	8	9



V. Chvátal. *Linear Programming*. 1983.

Přirazovací problém

- Jsou zadány 2 množiny n objektů a ceny c_{ij} za jejich spárování
- Přirazení reprezentujeme **permutační maticí** o složkách x_{ij}
- Hledáme přirazení minimalizující celkovou cenu

Assignment Problem s binárními proměnnými $x_{ij} \in \{0, 1\}$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

za podmínek
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

LP relaxace přiřazovacího problému

V relaxované úloze je hledané přiřazení vyjádřeno pomocí **dvojitě stochastické matice** o složkách x_{ij} .

Assignment Problem s reálnými proměnnými $x_{ij} \in [0, 1]$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{za podmíněk } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

Optimální řešení přiřazovacího problému

Věta

Pro přiřazovací problém platí:

1. LP relaxace i původní úloha mají stejnou optimální hodnotu
2. Mezi optimálními řešeními LP relaxace existuje celočíselné

Plyne to z této věty:

Věta (Birkhoff–von Neumann)

Množina všech dvojitě stochastických matic řádu n je omezený konvexní polyedr v \mathbb{R}^{n^2} jehož vrcholy jsou permutační matice.

Příklad – optimální přiřazení učitelů k předmětům (Julia)

```
1 import Pkg
2 Pkg.add("JuMP")
3 Pkg.add("GLPK")
4 using JuMP
5 using GLPK
6
7 A = [
8     7 5 4 4 5;
9     7 9 7 9 4;
10    4 6 5 8 5;
11    5 4 5 7 4;
12    4 5 5 8 9;
13 ]
14
15 model = Model(GLPK.Optimizer)
16
17 @variable(model, 0 <= X[1:5, 1:5] <= 1);
18 @constraint(model, sum(X, dims=1) .== 1);
19 @constraint(model, sum(X, dims=2) .== 1);
20 @objective(model, Max, sum(A .* X));
21
22 optimize!(model)
23 optX = Int.(value.(X))
24 optvalue = sum(A .* optX)
25 @show optX
26 @show optvalue
--
```

Optimální řešení

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Optimální hodnota 38

Nejmenší vrcholové pokrytí

Kolik hlídačů musíme umístit do vrcholů grafu, aby byla každá hrana monitorována?

Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu (V, E) je podmnožina $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X .

Minimal Vertex Cover s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, kde $i \in V$

$$\min \sum_{i \in V} x_i$$

$$\text{za podmínek } x_i + x_j \geq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E$$

LP relaxace nejmenšího vrcholového pokrytí

Úloha s proměnnými $x_i \in [0, 1]$, kde $i \in V$

$$\min \sum_{i \in V} x_i$$

za podmínek $x_i + x_j \geq 1, \{i, j\} \in E$

Již pro úplný graf o 3 vrcholech dostaneme

opt. hodnota relaxace = 1.5 < 2 = opt. hodnota

LP relaxace nejmenšího vrcholového pokrytí – vlastnosti

Definujme:

- y^* je optimální hodnota úlohy
- $(x_i)_{i \in V}$ je optimální řešení relaxace, $y := \sum_{i \in V} x_i$
- Zaokrouhlené řešení relaxované úlohy $\bar{x}_i := \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$
- $\bar{y} := \sum_{i \in V} \bar{x}_i$

Tvrzení

Pro každý graf (V, E) je zaokrouhlené řešení přípustným celočíselným řešením a platí

$$y^* \leq \bar{y} \leq 2y^*, \quad \frac{1}{2}y^* \leq y \leq y^*.$$

Největší nezávislá množina

Kolik mohu pozvat na party rozhádaných kamarádů, abych nezkazil zábavu?

Podmnožina $X \subseteq V$ neorientovaného grafu (V, E) je **nezávislá**, pokud žádné dva vrcholy z X nejsou spojeny hranou.

Maximum Independent Set s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in V$

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$\text{za podmínek } x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E$$

Maximum Independent Set s proměnnými $x_i \in [0, 1], i \in V$

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

za podmíněk $x_i + x_j \leq 1, \forall \{i, j\} \in E$

- Relaxace má přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2} (i \in V)$ o hodnotě $\frac{1}{2}|V|$
- Tedy optimální hodnota LP relaxace splňuje $y \geq \frac{1}{2}|V|$
- Ale pro úplný graf je optimální hodnota úlohy $y^* = 1!$

- Problém obchodního cestujícího
- Toky v sítích
- Problém batohu
- Rozvrhování

Smíšené celočíselné programování (MILP)

$$\min \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{Ax} + \mathbf{By} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n_1}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}$$

Úloha celočíselného programování je NP-těžká. Nejpoužívanější algoritmy obvykle využívají v některém kroku lineární programování, pro něž existuje polynomiální algoritmus.

- Metoda větví a mezí (branch and bound)
- Metoda sečných nadrovin