

Optimalizace

Dualita v LP

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2023 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Primární úloha

$$\min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{za podmínek} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Duální úloha

$$\max \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\text{za podmínek} \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$

- Duál duální úloha je primární úloha
- Duální úlohu lze definovat pro úlohu LP v libovolné formě

Dvojice duálních úloh pro LP v obecném tvaru

$$\min \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\text{za podm. } \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$x_j \in \mathbb{R}$$

$$x_j \geq 0$$

$$x_j \leq 0$$

$$\max \sum_{i \in I} y_i b_i$$

$$\text{za podm. } y_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in I_0$$

$$y_i \geq 0 \quad \forall i \in I_+$$

$$y_i \leq 0 \quad \forall i \in I_-$$

$$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j \quad \forall j \in J_0$$

$$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j \quad \forall j \in J_+$$

$$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j \quad \forall j \in J_-$$

Příklad

$$\begin{array}{l} \min \quad 2x_1 \qquad \qquad - 3x_3 + x_4 \\ \text{z.p.} \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ \quad -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ \quad x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \geq 0 \\ \quad x_1 \geq 0 \\ \quad x_2 \in \mathbb{R} \\ \quad x_3 \geq 0 \\ \quad x_4 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max \quad 6y_1 + 5y_2 \\ \text{z.p.} \qquad \qquad \qquad y_1 \in \mathbb{R} \\ \qquad \qquad \qquad y_2 \leq 0 \\ \qquad \qquad \qquad y_3 \geq 0 \\ \quad 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ \quad -y_1 + 2y_2 - y_3 = 0 \\ \quad y_1 - 3y_2 - y_3 \leq - \\ \quad 2y_1 \qquad \qquad - 3y_3 \geq 1 \end{array}$$

Příklad

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Tvrzení

Pro každé přípustné primární řešení \mathbf{x} a každé přípustné duální řešení \mathbf{y} platí:

1. $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
2. Pokud $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$, potom jsou \mathbf{x}^* a \mathbf{y}^* optimální řešení

- Duální LP zdola omezuje primární LP
- Pokud je mez těsná, našli jsme **optimum** obou úloh

Podmínky komplementarity

- I je indexová množina primárních omezení (duál. proměnných)
- J je indexová množina duálních omezení (prim. proměnných)

Věta

Nechť \mathbf{x} je přípustné primární řešení a \mathbf{y} je přípustné duální řešení. Rovnost $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ platí právě tehdy, když platí tyto podmínky:

1. $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$ nebo $y_i = 0$ $\forall i \in I$
2. $x_j = 0$ nebo $\sum_{i \in I} a_{ij} y_i = c_j$ $\forall j \in J$

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Primární úloha má optimální řešení \mathbf{x}^* .
2. Duální úloha má optimální řešení \mathbf{y}^* .

Pokud platí jedno z těchto tvrzení, pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.

- Duální úloha nejen zdola omezuje primární úlohu, ale dokonce i nabývá hodnoty společného optima
- Nalezení společné hodnoty obou úloh LP tak poskytuje tzv. **certifikát optimality**

Příklad

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4$$

$$3 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$2.4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$3 = x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-0.6 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$1.2 = x_1 \geq 0$$

$$0.6 = x_2 \geq 0$$

$$0 = x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2 = 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$5 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$3 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

Vlastnosti primáru a duálu – možnosti

P/D	Má optimum	Neomezená	Nepřípustná
Má optimum	✓	ne	ne
Neomezená	ne	ne	✓
Nepřípustná	ne	✓	✓

- Červeně zakázané kombinace plynou ze silné duality
- Zbylá plyne ze slabé duality
- Platí: **P** a **D** mají optimum \Leftrightarrow **P** a **D** jsou přípustné