

Optimalizace

17. Konvexní množiny a konvexní polyedry

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

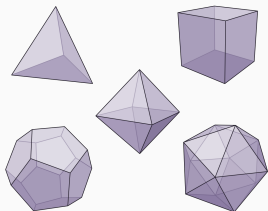
2023 LS






Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Jak vypadá množina přípustných řešení v úloze LP?

Minimalizuj $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

za podmínek $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$



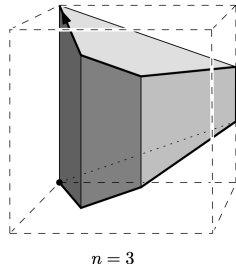
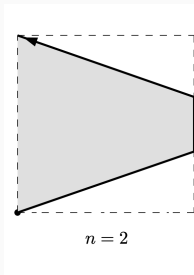
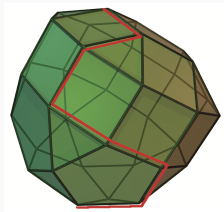
Name	Image	Vertices	Edges	Faces	Euler characteristic:
		V	E	F	$V - E + F$
Tetrahedron		4	6	4	2
Hexahedron or cube		8	12	6	2
Octahedron		6	12	8	2
Dodecahedron		20	30	12	2
Icosahedron		12	30	20	2

Wikipedia

Jak nalézt řešení úlohy LP?

Ukážeme si, že:

- Pokud minimum existuje, nachází se ve *vrcholu* polyedru
- **Simplexová metoda** umí procházet všechny vrcholy



Konvexní množiny

Definice

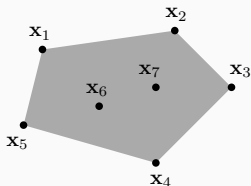
Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ a každé $\alpha \in [0, 1]$ platí $(1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X$.



- **Konvexní kombinace** je lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, kde $\alpha_i \geq 0$ a $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$
- Množina je konvexní právě tehdy, když obsahuje konvexní kombinace všech bodů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$

Operace s konvexními množinami

- *Průnik* libovolně mnoha konvexních množin je konvexní
- *Sjednocení* dvou konvexních množin nemusí být konvexní
- *Konvexní obal* libovolné množiny vektorů je průnik všech konvexních množin, které tu množinu obsahují



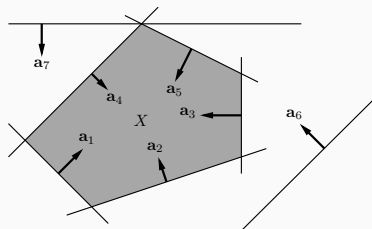
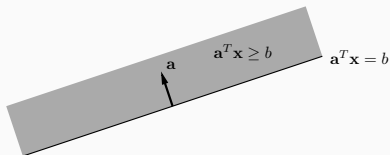
Konvexní polyedry

Definice

- **Uzavřený poloprostor** je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$
- **Konvexní polyedr** je průnik konečně mnoha poloprostorů, tj.

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

Dimenze konvexního polyedru je dimenze jeho afinního obalu.



Příklady konvexních polyedrů

- Nadrovina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
- Afinní podprostor $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
- Hyperkrychle $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$
- Standardní simplex $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$
- Platónská tělesa

Definice

Nechť X je konvexní množina. Bod $\mathbf{x} \in X$ je **extremální**, pokud

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

- Konvexní množina nemusí mít extrémální bod
- Polyedr má konečně mnoho extrémálních bodů a ty lze získat řešením soustavy lineárních rovnic

Extremální body polyedru

- $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Pro neprázdnou množinu řádkových indexů $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ uvažujeme matici \mathbf{A}_I a vektor \mathbf{b}_I

Věta

Nechť $\mathbf{x} \in X$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Bod \mathbf{x} je extrémální.
2. Existuje neprázdná $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tak, že platí $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ a matice \mathbf{A}_I má lineárně nezávislé sloupce.

Jak procházet extrémální body polyedru?

Na základě předchozí věty se nabízí tento přímočarý postup:

Algoritmus

- Vygeneruj neprázdnou množinu $I \subseteq \{1, \dots, m\}$
- Vyřeš soustavu $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$
- Existuje-li jediné řešení \mathbf{x} a $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, pak je \mathbf{x} extrémální bod

Problém

Počet extrémálních bodů některých polyedrů je exponenciální v m .

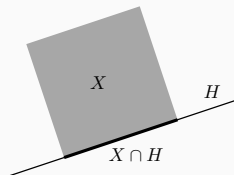
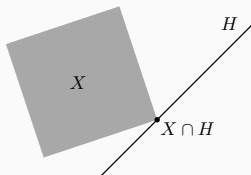
Konvexní množina se opírá o nadrovinu

Definice

Opěrná nadrovina konvexní množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je nadrovina

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$$

taková, že $X \cap H \neq \emptyset$ a platí $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.



Definice

Stěna polyedru X je množina $X \cap H$, kde H je nějaká opěrná nadrovina polyedru X .

Podle dimenze rozlišujeme tyto stěny:

- **Vrchol** (0)
- **Hrana** (1)
- **Faseta** ($\dim X - 1$)

Bod $x \in X$ je vrchol, právě když je to extrémální bod.

Které polyedry mají vrchol?

Věta

Nechť $X \neq \emptyset$ je konvexní polyedr. Tato tvrzení jsou ekvivalentní.

1. Polyedr X má alespoň jeden vrchol.
2. Polyedr X neobsahuje přímku.

Příklady

- omezený konvexní polyedr
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Kde nabývá lineární funkce na polyedru minima?

Věta

Nechť konvexní polyedr X neobsahuje přímku a lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ má na X minimum. Potom nabývá f minima v nějakém vrcholu polyedru X .

- Označme $\mathbf{x}^* \in X$ bod minima
- Pak $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*\}$ je opěrná nadrovina polyedru X v bodě \mathbf{x}^*
- Tudíž f nabývá minima na celé stěně $X \cap H$
- $X \cap H$ neobsahuje přímku, tedy má vrchol

Co z toho plyne pro řešení úlohy LP?

Úlohu LP

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \underbrace{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}}_X\}$$

nyní umíme vyřešit, pokud

- polyedr X neobsahuje přímku
- funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ má na X minimum
- umíme **efektivně** procházet vrcholy polyedru X

Simplexová metoda řeší úlohu LP v plné obecnosti.