Optimalizace

16. Úvod do lineárního programování

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2023 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Lineární programování (LP)

- Minimalizace lineární funkce při lineárních omezeních
- Efektivní algoritmy na výpočet globálního optima pro velmi rozsáhlé úlohy (desítky tisíc proměnných)
- Na pomezí spojité a kombinatorická optimalizace

Aplikace

- Optimalizace produkčních kapacit
- Regrese a aproximace
- Teorie her
- Nejlepší přiřazení
- Toky v síti

Plán

1. Formulace úloh a jazyk LP
2. Konvexní polyedry
3. Dualita v LP
4. Simplexový algoritmus
5. Celočíselné LP

Základní pojmy a příklady

Definice úlohy LP a její maticový tvar

Úloha LP

$$\begin{aligned} \text{Minimalizuj} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podmínek} \quad & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Soustava lineárních nerovnic určuje přípustná řešení
- Maticový zápis pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- Uvedený tvar úlohy LP postihuje $\leq$ i $=$

Transformace do rovnicového tvaru

Rovnicový tvar úlohy LP

$$\min\left\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}$$

Každou úlohu LP převedeme do tohoto tvaru pomocí 2 úprav:

1. Přidání nezáporné slackové proměnné pro každé omezení ve tvaru nerovnosti
2. Vyjádření neomezené reálné proměnné x jako $x = x^+ - x^-$, kde $x^+ \geq 0$ a $x^- \geq 0$

Typické úlohy

Maximalizace zisku z vyráběných produktů $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových zisků z prodeje produktů
- $\mathbf{A}$ udává spotřebu materiálu i při výrobě produktu j
- $\mathbf{b}$ udává disponibilní množství jednotlivých materiálů

Maximalizuj celkový zisk $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

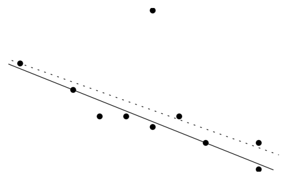
Minimalizace nákladů na mix surovin $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových cen surovin
- $\mathbf{A}$ udává množství látky i obsažené v surovině j
- $\mathbf{b}$ udává požadované množství jednotlivých látek v mixu

Minimalizuj celkovou cenu $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Lineární regrese s vychýlenými hodnotami

- Chceme proložit data $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ vhodnou lineární regresní funkcí $f(x, \boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \varphi_1(x) + \cdots + \theta_n \varphi_n(x)$
- Malá část hodnot y_i představuje outliers (vychýlené hodnoty)
- Nechceme, aby takové hodnoty příliš ovlivnily odhad $\boldsymbol{\theta}$



Úloha

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})|, \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

Čebyševova aproximace

- Aproximovaná funkce má v bodech x_i hodnoty y_i
- Hledáme aproximující polynom $p(x, \boldsymbol{\theta})$ s koeficienty $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$
- Chceme, aby maximální chyba v každém bodě byla minimální

Úloha na minimax

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{m} |y_i - p(x_i, \boldsymbol{\theta})|, \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

Obě předchozí úlohy lze formulovat pomocí LP jako hledání přibližného řešení přeurčené soustavy lineárních rovnic.

Normy

Jak měřit velikost vektoru?

Definice

Funkce

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\mathbf{x}\| \in [0, \infty)$$

je norma, pokud platí:

- $\|\mathbf{x}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

p-normy

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in [1, \infty]$$

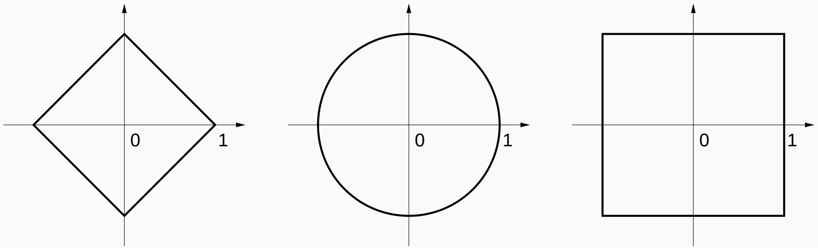
Tři důležité normy

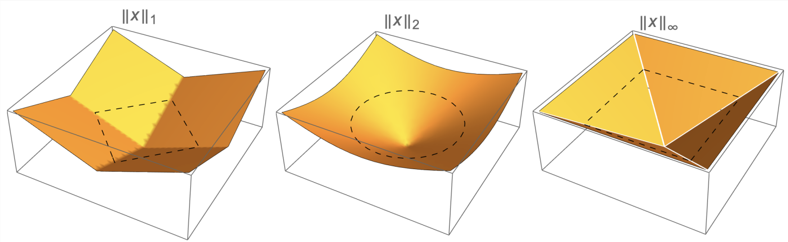
Manhattanská $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

Eukleidovská $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

Čebyševova $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$

Jednotkové kružnice p-norem pro $p = 1, 2, \infty$





$$\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2 \geq \|\mathbf{x}\|_\infty$$

Přibližné řešení přeurčené soustavy v různých normách

Hledejme řešení úlohy

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p$$

pro $p = 1, 2, \infty$:

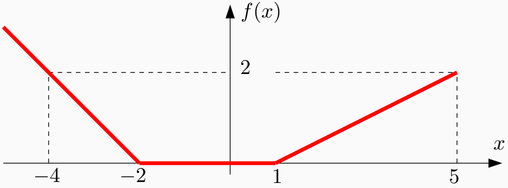
- Pro $p = 2$ má úloha řešení ve smyslu nejmenších čtverců.
- Pro $p = 1, \infty$ lze formulovat jako úlohu LP.

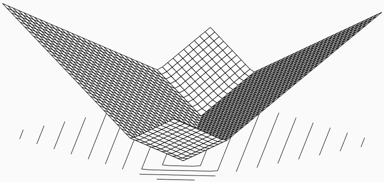
Transformace na úlohy LP

Konvexní po částech afinní funkce

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^{k} (\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i), \qquad \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^n, d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}\,.$$





Minimalizace konvexní po částech afinní funkce

Následující dvě úlohy jsou ekvivalentní:

Úloha 1

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{k} \left(\mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i\right) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Úloha 2

$$\text{Minimalizuj } y \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \;\; \mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i \leq y \; \forall i, \;\; (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Řešení přeurčené soustavy pomocí LP

Řešení úlohy $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_p$ pro $p=1,\infty$ se nalezne takto:

$p=\infty$

Problém $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max\limits_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}-b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP:

$$\text{Minimalizuj } y \quad \text{z.p. } -y \le \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}-b_i \le y \ \ \forall i$$

$p=1$

Problém $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}-b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP:

$$\text{Minimalizuj } \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{z.p. } -y_i \le \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x}-b_i \le y_i \ \ \forall i$$

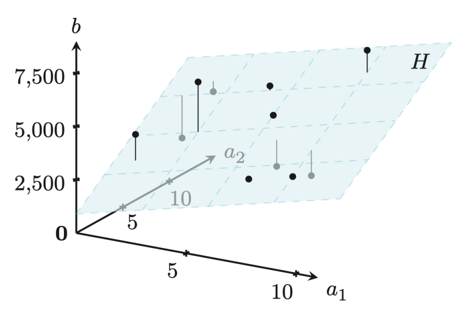
Příklad (1)

Odhadujeme neznámé parametry $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ lineární regresní funkce

$$f(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \theta_3$$

na základě pozorování a_{i1}, a_{i2} a b_i.

Person i	b_i	a_{i1}	a_{i2}
1	4,585	2	10
2	7,865	9	10
3	3,379	7	2
4	6,203	3	6
5	2,466	1	9
6	3,248	7	5
7	4,972	6	7
8	3,437	9	4
9	3,845	1	4
10	3,878	9	2
11	5,674	5	9



Příklad (2)

Původní úloha

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{11} |b_i - \theta_1 a_{i1} + \theta_2 a_{i2} + \theta_3| \quad \text{za podmínky } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$$

Ekvivalentní LP

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{11} y_i \quad \text{za podmínek } (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{11}$$

$$-y_i \leq b_i - \theta_1 a_{i1} + \theta_2 a_{i2} + \theta_3 \leq y_i \quad i = 1, \ldots, 11$$