

Cvičení 25:15, 36. dubna 2075  
Vaše jméno a příjmení:

## LGR — první semestrální test — VAŠE ID JE 1

V příkladech týkajících se výrokové logiky je množinou atomických formulí množina

$$At = \{a, b, c\}.$$

**Úloha 1 (5 bodů)** Množina formulí  $M \subseteq Fm(At)$  a formule  $\varphi \in Fm(At)$  jsou zadány následovně:

$$M = \{(a \wedge b) \Rightarrow a, c \Rightarrow (\neg b \wedge a), \neg c \Rightarrow a\}, \quad \varphi = \neg b \Rightarrow (a \Rightarrow \neg c).$$

Pokud je formule  $\varphi$  logickým důsledkem množiny formulí  $M$ , dokažte to přirozenou dedukcí. Pokud ne, ukažte, že  $\varphi$  není sémantickým důsledkem množiny  $M$ .

**Úloha 2 (5 bodů)** Dokažte přirozenou dedukcí následující tvrzení. Používejte pouze základní odvozovací pravidla.

$$\neg(a \wedge b) \vdash \neg a \vee \neg b$$

**Úloha 3 (5 bodů)** Jazyk predikátové logiky  $\mathcal{L}$  je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \text{Pred} &= \{P\}, & ar(P) &= 1 \\ \text{Func} &= \{f\}, & ar(f) &= 2 \\ \text{Kons} &= \{a\} \end{aligned}$$

Uvažujte interpretaci  $\mathcal{I}$  jazyka  $\mathcal{L}$  s universem  $U = \mathbb{Z}$ , kde

$$\begin{aligned} \llbracket P \rrbracket &= \{3 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}, \\ \llbracket f \rrbracket &: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ je sčítání celých čísel,} \\ \llbracket a \rrbracket &= 7. \end{aligned}$$

Rozhodněte a pečlivě zdůvodněte, které z následujících formulí  $\varphi, \psi, \chi$

$$\varphi = P(f(x, a)), \quad \psi = \exists x P(f(x, a)), \quad \chi = \forall y \exists x P(f(x, y))$$

jsou pravdivé v kontextu proměnných

$$\begin{aligned} \rho &: \text{Var} \rightarrow \mathbb{Z} \\ &x \mapsto 1. \end{aligned}$$