Příklady k procvičení přirozené dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\begin{array}{|c|}\hline x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \\ \hline\end{array}}{\forall x \varphi}\, i\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\, e\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\, i\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \begin{array}{|l|}\hline x_0 : \quad \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \\ \hline\end{array}}{\chi}\, e\exists x$

	Zavedení	Eliminace	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}\, i=$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}\, e=$	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\, sym=$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\, trans=$

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termech se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

1 Obecný kvantifikátor

1.1 Unární predikáty

1. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$
2. $\vdash \forall x(P(x) \Rightarrow P(x))$
3. $\forall x(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$
4. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z(P(z) \wedge Q(z))$
5. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$
6. $\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y P(y) \wedge \forall y Q(y)$
7. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x \neg P(x)$
8. $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vdash \forall z(P(z) \vee Q(z))$
9. $\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$
10. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$
11. $\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ \neg \forall x P(x) \vdash \neg \forall x \neg Q(x)$
12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

1.2 Binární predikáty

1. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$
2. $\forall x \neg \forall y R(x, y) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(x, y)$
3. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x, y)$
4. $\forall x \neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x))$
5. vynecháno
6. $\forall x R(x, x) \vdash \forall x \forall y(R(x, y) \Rightarrow \neg \forall z \neg(R(x, z) \wedge R(z, y)))$
7. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x(R(x, x) \wedge \forall y R(y, x))$
8. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x \forall y(R(x, y) \wedge R(y, x))$

2 Existenční kvantifikátor

2.1 Unární predikáty

1. $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$
2. Vynecháno
3. $\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists y Q(y)$
4. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$
5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$
6. $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z(P(z) \vee Q(z))$
7. $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$ (Můžete použít LEM.)

2.2 Binární predikáty

1. $\vdash_{\{z\}} \exists x \exists y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$
2. $\exists x \exists y R(x,y) \vdash \exists x \exists y R(y,x)$
3. $\exists x R(x,x) \vdash \exists x \exists y(R(x,y) \wedge R(y,x))$
4. $\neg\exists x \exists y R(x,y) \vdash \neg\exists y R(y,y)$
5. $\vdash \neg\exists x \exists y(R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$
6. $\vdash_{\{z\}} \exists x R(x,x) \vee \exists x(R(x,x) \Rightarrow \neg\exists y R(y,x))$ (Můžete použít LEM.)
7. $R(a,b) \wedge R(b,c),\ \neg Q(a),\ Q(c) \vdash \exists x \exists y((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x,y))$ (Můžete použít LEM.)

2.3 Smíšené úlohy

1. $\neg\exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$
2. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg\forall x P(x)$
3. $\neg\forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$
4. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg\exists x P(x)$
5. $\forall x(\exists y P(y) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x \exists y(P(y) \Rightarrow Q(x))$

6. $\forall x \neg \forall y (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)) \vdash \forall x \exists y P(x,y)$
7. $\forall x (P(x,x) \vee \forall y Q(x,y)) \vdash \forall x (\exists y P(x,y) \vee Q(x,x))$
8. $\exists x (P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y)) \vdash \exists x (\exists y P(x,y) \wedge Q(x,x))$
9. $\vdash \forall x \exists y R(x,y) \vee \neg \forall x R(x,x)$
10. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \neg \exists x R(x,x),\ \exists x \forall y R(y,x) \vdash \forall x \neg R(x,x)$
11. $\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y R(y,x)) \vdash \exists z R(z,a) \vee \neg \forall x P(x)$
12. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \vee R(z,y)) \vee R(z,x)) \vdash_{\{w_0\}} \exists x \exists y \forall z (R(z,x) \vee R(z,y))$

3 Rovnost

1. $a = b,\ \neg(b = b \wedge b = c) \vdash \neg(a = c)$
2. $\vdash a = b \Leftrightarrow \forall x (x = a \Rightarrow x = b)$
3. $\exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y (x = y)$
4. $P(a),\ \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$
5. $P(b) \wedge Q(b),\ \forall x (P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$
6. $\forall x ((x = a) \vee (x = b)),\ \exists x P(x) \vdash (\neg P(a)) \Rightarrow P(b)$
7. $\forall x \forall y ((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg (P(z) \wedge Q(z))$
8. $\forall x \forall y (R(x,y) \Leftrightarrow x = y) \vdash \forall x R(x,x)$
9. $\forall x \neg R(x,x),\ R(a,b) \vdash \exists x \exists y \neg (x = y)$
10. $\exists x \exists y R(x,y),\ \exists x \forall y (x = y) \vdash \forall x \forall y R(x,y)$
11. $\vdash \forall x P(x,x) \Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x,y) \Rightarrow \neg (x = y))$
12. $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y)),\ \forall x \neg R(x,x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$

Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*