Příklady k procvičení přirozené dedukce v predikátové logice

Kvantifikátor	Zavedení kvantifikátoru	Eliminace kvantifikátoru
$\forall x$	$\dfrac{\begin{array}{|c|}\hline x_0 \\ \vdots \\ \varphi[x_0/x] \\ \hline\end{array}}{\forall x \varphi}\, i\forall x$	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}\, e\forall x$
$\exists x$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}\, i\exists x$	$\dfrac{\exists x \varphi \qquad \begin{array}{|l|}\hline x_0 : \quad \varphi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \\ \hline\end{array}}{\chi}\, e\exists x$

	Zavedení	Eliminace	Symetrie	Transitivita
Pravidlo pro rovnost	$\dfrac{}{t = t}\, i=$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}\, e=$	$\dfrac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\, sym=$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\, trans=$

Ve všech pravidlech předpokládáme, že substituovaný term je volný pro danou proměnnou v dané formuli. V používaných termech se nesmí objevovat nedeklarované proměnné.

Ve všech příkladech pracujeme s takovým jazykem predikátové logiky, aby všechny předpoklady a závěry byly sentencemi predikátové logiky v daném jazyce.

1 Obecný kvantifikátor

1.1 Unární predikáty

1. $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

1.	$\forall x P(x)$	1
2.	x_0	D
3.	$P(x_0)$	e$\forall$x, 1
4.	$\forall y P(y)$	i$\forall$x, 2–3

2. $\vdash \forall x(P(x) \Rightarrow P(x))$

1.	x_0	D
2.	$P(x_0)$	P
3.	$P(x_0) \Rightarrow P(x_0)$	i$\Rightarrow$, 2–2
4.	$\forall x(P(x) \Rightarrow P(x))$	i$\forall$x, 1–3

3. $\forall x(P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1.	$\forall x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$P(a)$	P
3.	z_0	D
4.	$P(a) \Rightarrow Q(z_0)$	e$\forall$x, 1
5.	$Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 2, 4
6.	$\forall z Q(z)$	i$\forall$x, 3–5
7.	$P(a) \Rightarrow \forall z Q(z)$	i$\Rightarrow$, 2–6

4. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \vdash \forall z(P(z) \wedge Q(z))$

1.	$\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)$	P
2.	$\forall x P(x)$	e$\wedge_1$, 1
3.	$\forall y Q(y)$	e$\wedge_2$, 1
4.	z_0	D
5.	$P(z_0)$	e$\forall$x, 2
6.	$Q(z_0)$	e$\forall$y, 3
7.	$P(z_0) \wedge Q(z_0)$	i$\wedge$, 6, 7
8.	$\forall z(P(z) \wedge Q(z))$	i$\forall$z, 5–8

5. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall y P(y)$	P
3.	z_0	D
4.	$P(z_0)$	e$\forall$y, 3
5.	$P(z_0) \Rightarrow Q(z_0)$	e$\forall$x, 1
6.	$Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 4, 5
7.	$\forall z Q(z)$	i$\forall$z, 3–6
8.	$\forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z)$	i$\Rightarrow$, 2–7

6. $\forall z(P(z) \wedge Q(z)) \vdash \forall y P(y) \wedge \forall y Q(y)$

1.	$\forall z(P(z) \wedge Q(z))$	P
2.	y_0	D
3.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	e$\forall$z, 1
4.	$P(y_0)$	e$\wedge_1$, 3
5.	$\forall y P(y)$	i$\forall$y, 2–4
6.	y_0	D
7.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	e$\forall$z, 1
8.	$Q(y_0)$	e$\wedge_2$, 7
9.	$\forall y Q(y)$	i$\forall$y, 6–8
10.	$\forall y P(y) \wedge \forall y Q(y)$	i$\wedge$, 5, 9

7. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x \neg Q(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x \neg Q(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	e$\forall$x, 1
6.	$Q(x_0)$	e$\Rightarrow$, 4, 5
7.	$\neg Q(x_0)$	e$\forall$x, 2
8.	$\bot$	e$\neg$, 6, 7
9.	$\neg P(x_0)$	i$\neg$, 4–8
10.	$\forall x \neg P(x)$	i$\forall$x, 3–9

8. $\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \vdash \forall z(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$	P
2.	z_0	D
3.	$\forall x P(x)$	P
4.	$P(z_0)$	e$\forall$x, 3
5.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	i$\vee_1$, 4
6.	$\forall y Q(y)$	P
7.	$Q(z_0)$	e$\forall$y, 6
8.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	i$\vee_2$, 7
9.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	e$\vee$, 1, 3–5, 6–8
10.	$\forall z(P(z) \vee Q(z))$	i$\forall$z, 3–9

9. $\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$

1.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0)$	P
4.	z_0	D
5.	$\forall y (P(x_0) \Rightarrow Q(y))$	e$\forall$x, 1
6.	$P(x_0) \Rightarrow Q(z_0)$	e$\forall$y, 5
7.	$Q(z_0)$	e$\Rightarrow$, 3, 6
8.	$\forall z Q(z)$	i$\forall$z, 4–7
9.	$P(x_0) \Rightarrow \forall z Q(z)$	i$\Rightarrow$, 4–8
10.	$\forall x (P(x) \Rightarrow \forall z Q(z))$	i$\forall$x, 3–9

10. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$

1.	$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$	P
2.	$\forall x (Q(x) \Rightarrow R(x))$	P
3.	x_0	D
4.	$P(x_0)$	P
5.	$P(x_0) \Rightarrow Q(x_0)$	e$\forall$x, 1
6.	$Q(x_0)$	e$\Rightarrow$, 4, 5
7.	$Q(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	e$\forall$x, 2
8.	$R(x_0)$	e$\Rightarrow$, 6, 7
9.	$P(x_0) \Rightarrow R(x_0)$	i$\Rightarrow$, 4–8
10.	$\forall x (P(x) \Rightarrow R(x))$	i$\forall$x, 4–9

11. $\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ \neg\forall x P(x) \vdash \neg\forall x \neg Q(x)$

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
2.	$\neg\forall x P(x)$	P
3.	$\forall x \neg Q(x)$	P
4.	x_0	D
5.	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	e$\forall$x, 1
6.	$\neg Q(x_0)$	e$\forall$x, 3
7.	$P(x_0)$	P
8.	$Q(x_0)$	P
9.	$\bot$	e$\neg$, 8, 3
10.	$P(x_0)$	e$\bot$, 9
11.	$P(x_0)$	e$\vee$, 5, 7–7, 8–10
12.	$\forall x P(x)$	i$\forall$x, 4–11
13.	$\bot$	e$\neg$, 12, 2
14.	$\neg\forall x \neg Q(x)$	i$\neg$, 3–13

12. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$

1.	$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	x_0	D
3.	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	e$\forall$x, 1
4.	$P(x_0)$	e$\wedge_1$, 3
5.	y_0	D
6.	$P(y_0) \wedge Q(y_0)$	e$\forall$x, 1
7.	$Q(y_0)$	e$\wedge_2$, 6
8.	$P(x_0) \wedge Q(y_0)$	i$\wedge$, 4, 7
9.	$\forall y(P(x_0) \wedge Q(y))$	i$\forall$y, 5–8
10.	$\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$	i$\forall$x, 2–9

1.2 Binární predikáty

1. $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x R(x, x)$

1.	$\forall x \forall y R(x,y)$	P
2.	x_0	D
3.	$\forall y R(x_0,y)$	e$\forall$x, 1
4.	$R(x_0,x_0)$	e$\forall$y, 3
5.	$\forall x R(x,x)$	i$\forall$x, 2–4

2. $\forall x \neg \forall y R(x,y) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y R(x,y)$
3. $\forall x R(x,x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x,y)$
4. $\forall x \neg R(x,x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$
5. vynecháno
6. $\forall x R(x,x) \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow \neg \forall z \neg (R(x,z) \wedge R(z,y)))$
7. $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x (R(x,x) \wedge \forall y R(y,x))$
8. $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x))$

1.	$\forall x \forall y R(x,y)$	P
2.	x_0	D
3.	y_0	D
4.	$\forall y R(x_0,y)$	e$\forall$x, 1
5.	$R(x_0,y_0)$	e$\forall$y, 4
6.	$\forall y R(y_0,y)$	e$\forall$x, 1
7.	$R(y_0,x_0)$	e$\forall$y, 6
8.	$R(x_0,y_0) \wedge R(y_0,x_0)$	i$\wedge$, 5, 7
9.	$\forall y (R(x_0,y) \wedge R(y,x_0))$	i$\forall$y, 3–8
10.	$\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x))$	i$\forall$x, 2–9

2 Existenční kvantifikátor

2.1 Unární predikáty

1. $\exists x P(x) \vdash \exists y P(y)$
2. Vynecháno
3. $\exists x (P(a) \Rightarrow Q(x)) \vdash P(a) \Rightarrow \exists y Q(y)$

4. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$

1.	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	P
2.	$x_0 : P(x_0) \wedge Q(x_0)$	W
3.	$P(x_0)$	e$\wedge_1$, 2
4.	$Q(x_0)$	e$\wedge_2$, 2
5.	$\exists y P(y)$	i$\exists$y, 2
6.	$\exists z Q(z)$	i$\exists$z, 3
7.	$\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$	i$\wedge$, 4, 5
8.	$\exists y P(y) \wedge \exists z Q(z)$	e$\exists$x, 1, 2–7

5. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$

6. $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z(P(z) \vee Q(z))$

1.	$\exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$z_0 : P(z_0)$	W
4.	$P(z_0) \vee Q(z_0)$	i$\vee_1$, 3
5.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	i$\exists$z, 4
6.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	e$\exists$x, 2, 3–5
7.	$\exists y Q(y)$	P
8.	$z_1 : Q(z_1)$	W
9.	$P(z_1) \vee Q(z_1)$	i$\vee_2$, 8
10.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	i$\exists$z, 9
11.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	e$\exists$y, 7, 8–10
12.	$\exists z(P(z) \vee Q(z))$	e$\vee$, 1, 2–6, 7–11

7. $P(a) \Rightarrow \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$ (Můžete použít LEM.)

1.	$P(a) \Rightarrow \exists x Q(x)$	P
2.	$P(a) \vee \neg P(a)$	LEM
3.	$P(a)$	P
4.	$\exists x Q(x)$	e⇒, 3, 1
5.	$x_0 : Q(x_0)$	W
6.	$P(a)$	P
7.	$Q(x_0)$	it, 5
8.	$P(a) \Rightarrow Q(x_0)$	i⇒, 6–7
9.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	i∃x, 8
10.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	e∃x, 4, 5–9
11.	$\neg P(a)$	P
12.	$P(a)$	P
13.	$\bot$	e¬, 12, 11
14.	$Q(x)$	e⊥, 13
15.	$P(a) \Rightarrow Q(x)$	i⇒, 12–14
16.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	i∃x, 15
17.	$\exists x(P(a) \Rightarrow Q(x))$	e∨, 2, 3–10, 11–16

2.2 Binární predikáty

1. $\vdash_{\{z\}} \exists x \exists y(R(x,y) \Rightarrow R(y,x))$

2. $\exists x \exists y R(x,y) \vdash \exists x \exists y R(y,x)$

3. $\exists x R(x,x) \vdash \exists x \exists y(R(x,y) \wedge R(y,x))$

4. $\neg\exists x \exists y R(x,y) \vdash \neg\exists y R(y,y)$

5. $\vdash \neg\exists x \exists y(R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$

1.	$\exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$	P
2.	$x_0 : \exists y (R(x_0,y) \wedge \neg R(x_0,y))$	W
3.	$y_0 : R(x_0,y_0) \wedge \neg R(x_0,y_0)$	W
4.	$R(x_0,y_0)$	e$\wedge_1$, 3
5.	$\neg R(x_0,y_0)$	e$\wedge_2$, 4
6.	$\bot$	e$\neg$, 4, 5
7.	$\bot$	e$\exists y$, 2, 3–6
8.	$\bot$	e$\exists x$, 1, 2–7
9.	$\neg \exists x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(x,y))$	i$\neg$, 1–8

6. $\vdash_{\{z\}} \exists x R(x,x) \vee \exists x (R(x,x) \Rightarrow \neg \exists y R(y,x))$ (Můžete použít LEM.)

7. $R(a,b) \wedge R(b,c),\ \neg Q(a),\ Q(c) \vdash \exists x \exists y ((\neg Q(x) \wedge Q(y)) \wedge R(x,y))$ (Můžete použít LEM.)

2.3 Smíšené úlohy

1. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

1.	$\neg \exists x P(x)$	P
2.	x	D
3.	$P(x)$	P
4.	$\exists x P(x)$	i$\exists x$, 3
5.	$\bot$	e$\neg$, 4, 1
6.	$\neg P(x)$	i$\neg$, 3–5
7.	$\forall x \neg P(x)$	i$\forall x$, 3–6

2. $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

1.	$\exists x \neg P(x)$	P
2.	$\forall x P(x)$	P
3.	$x_0 : \neg P(x_0)$	W
4.	$P(x_0)$	e$\forall x$, 2
5.	$\bot$	e$\neg$, 4, 3
6.	$\bot$	e$\exists x$, 1, 3–5
7.	$\neg \forall x P(x)$	i$\neg$, 2–6

3. $\neg\forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

1.	$\neg\forall x P(x)$	D
2.	$\neg\exists x \neg P(x)$	P
3.	x_0	D
4.	$\neg P(x_0)$	P
5.	$\exists x \neg P(x)$	i$\exists$x, 4
6.	$\bot$	e$\neg$, 5, 2
7.	$\neg\neg P(x_0)$	i$\neg$, 4–6
8.	$P(x_0)$	e$\neg\neg$, 7
9.	$\forall x P(x)$	i$\forall$x, 3–8
10.	$\bot$	e$\neg$, 9, 1
11.	$\neg\neg\exists x \neg P(x)$	i$\neg$, 2–10
12.	$\exists x \neg P(x)$	e$\neg\neg$, 11

4. $\forall x \neg P(x) \vdash \neg\exists x P(x)$

1.	$\forall x \neg P(x)$	P
2.	$\exists x P(x)$	P
3.	$x_0 : P(x_0)$	W
4.	$\neg P(x_0)$	e$\forall$x, 1
5.	$\bot$	e$\neg$, 3, 4
6.	$\bot$	e$\exists$x, 2, 3–5
7.	$\neg\exists x P(x)$	i$\neg$, 2–6

5. $\forall x(\exists y P(y) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall x \exists y(P(y) \Rightarrow Q(x))$

6. $\forall x \neg\forall y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)) \vdash \forall x \exists y P(x,y)$

7. $\forall x(P(x,x) \vee \forall y Q(x,y)) \vdash \forall x(\exists y P(x,y) \vee Q(x,x))$

8. $\exists x(P(x,x) \wedge \forall y Q(x,y)) \vdash \exists x(\exists y P(x,y) \wedge Q(x,x))$

9. $\vdash \forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$

1.	$\forall x R(x,x) \vee \neg\forall x R(x,x)$	LEM
2.	$\forall x R(x,x)$	P
3.	x_0	D
4.	$R(x_0,x_0)$	e$\forall$x, 2
5.	$\exists y R(x_0,y)$	i$\exists$y, 4
6.	$\forall x \exists y R(x,y)$	i$\forall$x, 3–5
7.	$\forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$	i$\vee_1$, 6
8.	$\neg\forall x R(x,x)$	P
9.	$\forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$	i$\vee_2$, 8
10.	$\forall x \exists y R(x,y) \vee \neg\forall x R(x,x)$	e$\vee$, 1, 2–7, 8–9

10. $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \neg\exists x R(x,x),\ \exists x \forall y R(y,x) \vdash \forall x \neg R(x,x)$

11. $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y R(y,x)) \vdash \exists z R(z,a) \vee \neg\forall x P(x)$

12. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \vee R(z,y)) \vee R(z,x)) \vdash_{\{w_0\}} \exists x \exists y \forall z(R(z,x) \vee R(z,y))$

3 Rovnost

1. $a = b,\ \neg(b = b \wedge b = c) \vdash \neg(a = c)$

1.	$a = b$	P
2.	$\neg(b = b \wedge b = c)$	P
3.	$a = c$	P
4.	$b = c$	e=, 1, 3
5.	$b = b$	i=
6.	$b = b \wedge b = c$	i$\wedge$, 5, 4
7.	$\bot$	e$\neg$, 6, 2
8.	$\neg(a = c)$	i$\neg$, 3–7

2. $\vdash a = b \Leftrightarrow \forall x(x = a \Rightarrow x = b)$

3. $\exists x \forall y(x = y) \vdash \forall x \forall y(x = y)$

4. $P(a),\ \neg P(b) \vdash \neg(a = b)$

1.	$P(a)$	P
2.	$\neg P(b)$	P
3.	$a = b$	P
4.	$P(b)$	e=, 3, 1
5.	$\bot$	e¬, 4, 2
6.	$\neg(a = b)$	i¬, 3–5

5. $P(b) \wedge Q(b),\ \forall x(P(x) \Rightarrow x = a) \vdash Q(a)$

1.	$P(b) \wedge Q(b)$	P
2.	$\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$	P
3.	$P(b) \Rightarrow b = a$	e∀x, 2
4.	$P(b)$	e$\wedge_1$, 1
5.	$b = a$	e⇒, 4, 3
6.	$Q(b)$	e$\wedge_2$, 1
7.	$Q(a)$	e=, 5, 6

6. $\forall x((x = a) \vee (x = b)),\ \exists x P(x) \vdash (\neg P(a)) \Rightarrow P(b)$

7. $\forall x \forall y((P(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \neg Q(y)) \vdash \forall z \neg(P(z) \wedge Q(z))$

8. $\forall x \forall y(R(x, y) \Leftrightarrow x = y) \vdash \forall x R(x, x)$

9. $\forall x \neg R(x, x),\ R(a, b) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

10. $\exists x \exists y R(x, y),\ \exists x \forall y(x = y) \vdash \forall x \forall y R(x, y)$

11. $\vdash \forall x P(x, x) \Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x, y) \Rightarrow \neg(x = y))$

12. $\forall x \exists y(R(x, y) \wedge P(y)),\ \forall x \neg R(x, x) \vdash_{\{z_0\}} \neg \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$

1.	z_0	D
2.	$\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(y))$	P
3.	$\forall x \neg R(x,x)$	P
4.	$\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	P
5.	$\exists y (R(z_0,y) \wedge P(y))$	e$\forall$x, 2
6.	$y_0 : R(z_0,y_0) \wedge P(y_0)$	W
7.	$\exists y (R(y_0,y) \wedge P(y)$	e$\forall$x, 2
8.	$x_0 : R(y_0,x_0) \wedge P(x_0)$	W
9.	$P(y_0)$	e$\wedge_2$, 6
10.	$P(x_0)$	e$\wedge_2$, 8
11.	$\forall y (P(y_0) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (y_0 = y)))$	e$\forall$x, 4
12.	$P(y_0) \Rightarrow (P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0))$	e$\forall$y, 11
13.	$P(x_0) \Rightarrow (y_0 = x_0)$	e$\Rightarrow$, 9, 12
14.	$y_0 = x_0$	e$\Rightarrow$, 10, 13
15.	$R(y_0,x_0)$	e$\wedge_1$, 8
16.	$R(y_0,y_0)$	e=, 14, 15
17.	$\neg R(y_0,y_0)$	e$\forall$x, 3
18.	$\bot$	e$\neg$, 16, 17
19.	$\bot$	e$\exists$y, 7, 8–18
20.	$\bot$	e$\exists$y, 5, 6–19
21.	$\neg \forall x \forall y (P(x) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow (x = y)))$	i$\neg$, 4–20
22.		

Reference

[1] Alastair Carr, The Natural Deduction Pack, *dostupné online*