

LGR — Závěr VL, úvod do PL

Matěj Dostál

1 Poctivci a padouši

Úloha 1. Jsme na ostrově, na kterém žijí jen poctivci a padouši. Poctivci mluví vždy pravdu a padouši vždy lžou. Zkuste vyřešit následující hádanky.

1. Tři obyvatelé ostrova, A, B a C si povídají na zahradě. Kolem jde cizinec a ptá se A: „Jste padouch, nebo poctivec?“ A odpoví, ale nezřetelně, takže cizinec neví, co A řekl. Cizinec se nato zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je padouch.“ V tom okamžiku C řekne: „Nevěřte B, ten lže!“

Co jsou B a C?

2. Cizinec přijde k dalším třem obyvatelům ostrova. Zeptá se A: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně. Cizinec se zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“

Co jsou B a C?

3. Teď máme dva obyvatele ostrova, A a B. A prohlásí: „Alespoň jeden z nás je padouch.“

Co jsou A a B?

4. Zase máme tři, A, B a C. A a B prohlásí:

A: „Všichni jsme padouši.“

B: „Právě jeden z nás je poctivec.“

Co jsou A, B a C?

5. Co kdyby v předchozím příkladu A a B řekli:

A: „Všichni jsme padouši.“

B: „Právě jeden z nás je padouch.“

Dá se určit, co je B? Dá se určit, co je C?

Úloha 2. Jste na ostrově poctivců a padouchů. Provádíte sčítání (a rozřazování) lidu. To jest, chcete zjistit, kdo je poctivec a kdo padouch.

1. Vstoupíte do prvního domu, otevře vám muž se ženou. Zeptáte se, kdo je kdo, muž odpoví: „Oba jsme padouši.“
2. Vstoupíte do druhého domu, otevřou vám dva muži. Zeptáte se, zda jsou padouši, první muž odpoví: „Alespoň jeden z nás je.“
3. Vstoupíte do třetího domu, otevřou vám dvě ženy. Zeptáte se první, zda je poctivá. Odpoví: „Pokud jsem poctivá, pak je poctivá i má žena.“
4. Vstoupíte do čtvrtého domu, otevře vám muž se ženou. Zeptáte se, co jsou zač. Muž odpoví: „Se ženou jsme jednoho druhu — oba poctivci nebo oba padouši.“

2 Metro chaosu

Ať symbol B označuje binární predikát „bouchnout do“, tedy $B(x, y)$ označuje „ x bouchnul do y “. Propojte následující sentence predikátové logiky s pro ně nejvhodnějšími popisy v přirozeném jazyce:

$\exists x \exists y B(x, y)$	Metro chaosu!
$\exists x \forall y B(x, y)$	Někdo blokoval jediný východ.
$\forall x \exists y B(x, y)$	To se stává.
$\forall x \forall y B(x, y)$	Nevychované dítě proběhlo metrem.
$\exists y \forall x B(x, y)$	Každý utrpěl.
$\forall y \exists x B(x, y)$	Přeplněné metro.

3 Elementární úlohy

Poznámka. Tyto úlohy jsou přejaty z příkladů k předmětu LGR od prof. Demlové. V původním znění je naleznete na jejich stránkách.

V této sekci je jazyk \mathcal{L} predikátové logiky deklarován následovně (symboly x , y a z jsou proměnné):

$$\text{Pred} = \{P, Q\}, \quad \text{Func} = \{f, g\}, \quad \text{Kons} = \{a, b, c\}.$$

Symboly P a f jsou unární, symboly Q a g jsou binární.

Úloha 3. V následujících formulích označte všechny vázané výskyty proměnných a všechny volné výskyty proměnných. Které z formulí jsou sentence a které otevřené formule?

1. $\forall x \exists y Q(x, y)$
2. $Q(g(a, b), y) \Rightarrow (\exists y P(f(y)))$
3. $Q(a, b) \vee (\forall x Q(a, x))$
4. $Q(x, y) \Rightarrow Q(y, x)$
5. $Q(a, b) \wedge (\exists x \exists y Q(x, y))$
6. $(\forall x Q(a, x)) \Rightarrow (\forall x \forall y Q(y, x))$

4 Formalisace českých vět

Úloha 4. Je dán jazyk predikátové logiky \mathcal{L} s množinou proměnných $\text{Var} = \{x, y, z\}$, jehož množina predikátových symbolů je

$$\text{Pred} = \{Obd, Nav, Prof, Stud, Pred\},$$

množina konstantních symbolů je $\text{Kons} = \{m\}$ a množina funkčních symbolů je prázdná. Arita symbolů Obd a Nav je 2, arita symbolů $Prof$, $Stud$ a P je 1.

Predikátové symboly mají popořadě formalisovat následující vztahy mezi jsoucný z přirozeného jazyka:

$Obd(x, y)$	x obdivuje y ,
$Nav(x, y)$	x navštívil(a) y ,
$Prof(x)$	x je profesor(ka),
$Stud(x)$	x je student(ka),
$P(x)$	x je přednáška.

Konstantní symbol m odkazuje na nějakou (konkrétní) Marii.

Přeložte co nejuvěrněji následující věty z češtiny do jazyka \mathcal{L} predikátové logiky.

1. Marie obdivuje všechny profesory.
2. Někaký profesor obdivuje Marii.
3. Marie se obdivuje.
4. Žádný student nenavštívil všechny přednášky.
5. Žádnou přednášku nenavštívili všichni studenti.
6. Není přednášky, kterou by nenavštívil ani jeden student.