1 Opakování: indukce na přirozených číslech

Úloha 1. Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$U_n := 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

(V *sumačním zápisu* tedy definujeme $U_n := \sum_{i=0}^{n} i^3$.)

Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Úloha 2. Mějme $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $x \neq 1$. Dokažte (*indukcí podle* n), že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Dále dokažte, že nerovnost

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

platí pro všechna přirozená n.

Výrazy, ve kterých se vyskytují tři tečky, převeďte do sumačního zápisu.

Úloha 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n splňující $n > 3$ platí nerovnost

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}.$$

Úloha 4. Předpokládejte, že existují konstanty a, b, c, d takové, že pro všechna kladná celá čísla n platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Výběrem konkrétních hodnot pro n odvoďte, jakých hodnot by pak dané konstanty nutně musely nabývat (využijte své znalosti lineární algebry). Poté potvrďte obecnou platnost vaší rovnosti indukcí.

2 Induktivně definované množiny

Úloha 5. 1. Induktivně definujte množinu všech sudých přirozených čísel (jako podmnožinu všech přirozených čísel).

2. Induktivně definujte množinu všech lichých přirozených čísel.

Úloha 6. Nechť S je podmnožina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadána induktivními pravidly

1. $(n, 0)$ je v S pro každé $n \in \mathbb{N}$.
2. Pokud je (n, m) v S, pak je v S i $(n, m + 1)$.

- Ukažte, že $(4, 3) \in S$.
- Dokažte, že $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Při řešení úlohy vám může pomoci nakreslit si obrázek.

Úloha 7. Nechť T je podmnožina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadána induktivními pravidly

1. $(0, 0)$ je v T.
2. Pokud je (n, m) v T, pak je v T i $(n, m + 1)$.
3. Pokud je (n, m) v T, pak je v T i $(n + 1, m)$.
4. Pokud je (n, m) v T, pak je v T i $(n + 1, m + 1)$.

- Dokažte dvěma různými způsoby, že $(4, 3) \in T$.
- Dokažte, že $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Jak by vypadala množina T, kdybyste z její induktivní definice odebrali první, druhé, třetí či čtvrté pravidlo?

Úloha 8. Nechť $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. (Množinu Σ chápejte jako abecedu o dvou symbolech a, b.) Množinu $S \subseteq \Sigma^*$ definujeme následujícími induktivními pravidly:

1. $\epsilon \in S$. (Prázdné slovo náleží do S.)
2. Pokud $w \in S$, pak $\mathsf{a}w\mathsf{b} \in S$.

3. Pokud $w \in S$, pak $\mathtt{b}w\mathtt{a} \in S$.

4. Pokud $w \in S$ a $u \in S$, pak $wu \in S$.

Připomenutí: Množina Σ^* je množina všech (konečných) slov nad abecedou Σ, symbolem ϵ označujeme prázdné slovo.

- Ukažte, že S obsahuje slova aabbbbaa i baba.
- Dokažte strukturální indukcí, že všechna slova v množině S obsahují stejný počet znaků a i b.

Reference

[1] P. A. Fejer, D. A. Simovici, *Mathematical Foundations of Computer Science*, Springer-Verlag New York 1991