LGR — grafové úlohy: stromy

V těchto příkladech uvažujme pouze neorientované grafy.

Úloha 1. Ve stromu existuje mezi každými dvěma vrcholy právě jedna cesta. Dokažte.

Řešení. Nechť T je strom a u a v jeho vrcholy. Strom T je souvislý, proto z u do v vede alespoň jedna cesta.

Předpokládejme, že z u do v vedou dvě různé cesty, řekněme c_1 a c_2. Na cestě c_1 tudíž musí existovat hrana $x \overset{e}{—} y$, která neleží na c_2. Uvažujme nyní cesty c_1 a c_2 jako grafy C_1 a C_2.
(*Definujte pro libovolnou cestu c v grafu G pojem "graf cesty c" jako vhodný podgraf grafu G.*)

Uvažujme nyní podgraf $C = C_1 \cup C_2$ grafu T určený oběma cestami.
(*Definujte smysluplně pojem sjednocení dvou podgrafů daného grafu.*)

Graf C je jistě souvislý (*proč?*).

Dokonce i graf $C - e$ je souvislý (*proč?*).
(*Vhodným způsobem definujte pro graf G obsahující hranu e jeho faktor $G - e$.*)

V grafu $C - e$ tudíž existuje cesta $y \overset{c}{\sim} x$.

V grafu C je proto kružnice $x \overset{e}{—} y \overset{c}{\sim} x$.

Ale C je podgraf T a T je strom, tedy graf bez kružnic. To je spor, proto z u do v nevedou dvě různé cesty.

Úloha 2. Pro každý strom s množinou vrcholů V a množinou hran E platí rovnost $|E| = |V| - 1$. Dokažte.

Úloha 3. Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva vrcholy stupně 1. Dokažte.

Úloha 4. Ať G je prostý graf bez smyček. Dokažte, že pokud mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu G existuje právě jedna cesta, je G stromem.

Řešení. Graf G je souvislý: ať u a v jsou jeho libovolné vrcholy. Pak mezi u a v existuje (právě jedna) cesta.

Kdyby graf G obsahoval kružnici, znamená to, že existuje uzavřená cesta z vrcholu řekněme u zpět do u, a má délku alespoň 1. To jest, existuje cesta $u \overset{e}{—} v \overset{c}{\sim} u$. Pak ale mezi v a u existují alespoň dvě cesty: $v \overset{e}{—} u$ a $v \overset{c}{\sim} u$. To je spor: proto žádná kružnice v G není.

Úloha 5. Ukažte, že každý strom s přesně dvěma vrcholy stupně 1 je "grafem cesty".

Úloha 6. Ať G je graf s $|V| - 1$ hranami. Ukažte, že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.

1. G je souvislý.
2. G neobsahuje kružnice.
3. G je strom.

Úloha 7. Ukažte, že pokud je G stromem s maximálním stupněm $\Delta \geq k$ pro nějaké přirozené číslo k, pak má G alespoň k vrcholů stupně 1.

Úloha 8. Graf G bez kružnic se nazývá *les*. Ukažte, že

1. každý podgraf indukovaný souvislou komponentou lesa G je strom;
2. G je les právě tehdy, když se počet jeho hran rovná rozdílu počtu jeho vrcholů a počtu jeho souvislých komponent. (Označme počet jeho souvislých komponent jako $pk(G)$. Dokažte rovnost $|E| = |V| - pk(G)$.)