

# LGR — Sémantika predikátové logiky

Matěj Dostál

Úloha 1. Jazyk predikátové logiky  $\mathcal{L}$  je dán následující volbou symbolů:

$$\text{Pred} = \{R\}, \quad ar(R) = 2$$

$$\text{Func} = \emptyset$$

$$\text{Kons} = \emptyset$$

Mějme tři sentence

$$\varphi_1 = \forall x R(x, x)$$

$$\varphi_2 = \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$$

$$\varphi_3 = \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z))$$

Sestrojte tři interpretace, ve kterých jsou vždy pravdivé právě dvě ze tří výše uvedených sentencí. Až se vám to podaří, pokuste se najít *nejmenší* takové interpretace (to jest, interpretace s universem, které má nejmenší možný počet prvků).

**Řešení.** Zde jsou řešení daných třech úloh: všechna ověření ponecháváme na čtenáře a čtenáři. Ne všechna řešení jsou nejmenší možná.

1.  $\varphi_1, \varphi_2 \neq \varphi_3$ , což dokazuje interpretace  $U = \{a, b, c\}$  a

$$\llbracket R \rrbracket = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}.$$

2.  $\varphi_2, \varphi_3 \neq \varphi_1$ , což dokazuje interpretace  $U = \{a, b, c\}$  a

$$\llbracket R \rrbracket = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}.$$

3.  $\varphi_1, \varphi_3 \neq \varphi_2$ , což dokazuje interpretace  $U = \{a, b, c\}$  a

$$\llbracket R \rrbracket = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}.$$

**Úloha 2.** Rozlište sentencemi matematické struktury  $(\mathbb{N}, <)$ ,  $(\mathbb{Z}, <)$  a  $(\mathbb{Q}, <)$ . Používáme jazyk predikátové logiky s jediným (binárním) predikátovým symbolem  $<$ , který zapisujeme infixně a v daných matematických strukturách ho interpretujeme jako skutečnou ostrou nerovnost.

Co znamená *rozlišit* dvě interpretace nějakého jazyka predikátové logiky? To znamená najít sentenci, která je pravdivá v jedné interpretaci, ale nepravdivá v druhé interpretaci (či naopak).

**Řešení.** Sestrojíme dvě sentence  $\varphi$  a  $\psi$ . Sentence  $\varphi$  rozliší strukturu  $(\mathbb{N}, <)$  od ostatních dvou, sentence  $\psi$  rozliší strukturu  $(\mathbb{Z}, <)$  a  $(\mathbb{Q}, <)$ .

1. Necht'  $\varphi = \forall x \exists y (y < x)$ .
2. Necht'  $\psi = \forall x \forall y (x < y \Rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$ .

Sentence  $\varphi$  říká, že ke každému číslu existuje číslo menší, což je pravda pro celá čísla, ale nepravda pro přirozená čísla.

Sentence  $\psi$  říká přibližně toto: „mezi každými dvěma čísly existuje další číslo“. To je pravda pro racionální čísla, ale ne pro celá čísla. Je nutno však být při formalisaci opatrný: sentence  $\psi' = \forall x \forall y \exists z (x < z \wedge z < y)$  by nefungovala. Ta sice říká, že pro každou dvojici čísel existuje číslo větší než první a menší než druhé, ale všimněme si, že to například pro dvojici  $(12, 7)$  není pravda (naschvál jsme vzali první číslo větší než druhé). Ze stejného důvodu by nefungovala sentence  $\psi'' = \forall x \forall y (\neg(x = y) \Rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$ .

Poznámka: pokud bychom se snažili rozlišit  $(\mathbb{Q}, <)$  a  $(\mathbb{R}, <)$ , nepovede se nám to. (To je poměrně pokročilý výsledek týkající se predikátové logiky.)

**Úloha 3.** Mějme matematickou strukturu  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ , tedy přirozená čísla s operacemi sčítání a násobení. Uvažujme příslušný jazyk predikátové logiky (obsahující dva binární funkční symboly, dejme tomu  $+$  a  $\cdot$ ) a interpretujme tento jazyk v dané matematické struktuře. Vymyslete formuli, která definuje následující podmnožinu  $M \subseteq \mathbb{N}$ :

1.  $M = \{0\}$ .
2.  $M = \{1\}$ .
3.  $M = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ je následníkem } m\}$ .

$$4. M = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}.$$

Co znamená, že formule  $\varphi$  *definuje* podmnožinu  $M$  universa naší interpretace? Znamená to, že  $\varphi$  bude obsahovat jednu volnou proměnnou (řekněme  $x$ ), a bude pravdivá přesně pro ty kontexty  $\rho : x \mapsto m$ , pro které  $m \in M$ . Neformálně:  $\varphi$  je pravdivá přesně pro hodnoty  $z \in M$ .

Co znamená, že formule  $\varphi$  obsahující dvě různé volné proměnné definuje binární relaci  $R$  na  $U$ ? Znamená to, že  $\varphi$  je pravdivá přesně pro dvojice  $(u, v) \in U^2$ , které jsou v relaci  $R$ .

**Řešení.** 1. Necht'  $\varphi_0(x) = (x + x = x)$ .

2. Necht'  $\varphi_1(x) = (x \cdot x = x) \wedge \neg(x + x = x)$ . Zkráceně:

$$\varphi_1(x) = (x \cdot x = x) \wedge \neg\varphi_0(x).$$

3. Necht'  $\varphi_n(x, y) = \exists z((x + z = y) \wedge \varphi_1(z))$ , tedy nezkráceně:

$$\varphi_n(x, y) = \exists z((x + z = y) \wedge ((z \cdot z = z) \wedge \neg(z + z = z))).$$

4. Necht'  $\varphi_m(x, y) = \exists z((x + z = y) \wedge \neg\varphi_0(z))$ .

**Úloha 4.** Nalezněte sentenci, která charakterisuje

1. všechny jednoprvkové interpretace,
2. všechny dvouprvkové interpretace,
3. nulaprvkovou interpretaci.

Co znamená, že sentence  $\varphi$  *charakterisuje* všechny jednoprvkové interpretace? To znamená, že je  $\varphi$  pravdivá právě pro ty interpretace  $\mathcal{I}$ , jejichž universum má přesně jeden prvek.

Obecněji: Co znamená, že sentence  $\varphi$  *charakterisuje* třídu interpretací  $C$ ? To znamená, že je  $\varphi$  pravdivá právě pro ty interpretace  $\mathcal{I}$ , které leží v  $C$ .

**Řešení.** 1. Necht'  $\varphi_1 = \exists x \forall y (y = x)$ .

2. Necht'  $\varphi_2 = \exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$ .

3. Necht'  $\varphi_0 = \neg \exists x (x = x)$ .