

Cvičení: přirozená dedukce ve výrokové logice

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
\wedge	$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} i\wedge$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} e\wedge_1 \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} e\wedge_2$
\vee	$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} i\vee_1 \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} i\vee_2$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array}}{\chi} e\vee$
\Rightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Rightarrow \psi} i\Rightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} e\Rightarrow$
\Leftrightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \varphi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Leftrightarrow \psi} i\Leftrightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi} e\Leftrightarrow_1 \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi} e\Leftrightarrow_2$
\neg	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\neg \varphi} i\neg$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} e\neg$
\top	$\frac{}{\top} i\top$	není
\perp	není	$\frac{}{\perp} e\perp$
$\neg\neg$	(netřeba) $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} i\neg\neg$	$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} e\neg\neg$

Pomocné pravidlo: pravidlo iterace (it).

Odvozené pravidlo LEM (zákon vyloučeného třetího, tertium non datur):

$$\frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{LEM}$$

Ve všech příkladech můžete předpokládat, že zadané řetězce jsou formulemi výrokové logiky. Se-
strojte důkazy přirozenou dedukcí.

Základní příklady

1. $a \wedge b \vdash b \wedge a$.
2. $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$.
3. $q \vdash (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$.
4. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \vdash (a \wedge b) \Rightarrow c$.
5. $\vdash \neg(a \wedge b) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg b)$.
6. $\vdash ((a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow \neg c)) \Rightarrow \neg(a \wedge b)$.
7. $\vdash (a \wedge b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow \neg c))$.
8. $(p \vee q) \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$.
9. $\neg a \wedge \neg b \vdash \neg(a \vee b)$.
10. $w \Rightarrow x, y \Rightarrow z \vdash (w \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$.
11. $a \wedge (b \vee c) \vdash (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
12. $\neg a \vee \neg b \vdash \neg(a \wedge b)$.

Nepřímé důkazy

1. $\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$.

Příklady s ekvivalencí

1. $\vdash \neg(a \Leftrightarrow \neg a)$.
2. $a \Leftrightarrow b \vdash (\neg a \Leftrightarrow \neg b)$.

Příklady s využitím LEM V těchto příkladech využijte ke zkrácení důkazu pravidlo vyloučeného
třetího (LEM).

1. $a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$.
2. $\vdash a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$.