

Cvičení: přirozená dedukce ve výrokové logice

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
\wedge	$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} i\wedge$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} e\wedge_1 \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} e\wedge_2$
\vee	$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} i\vee_1 \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} i\vee_2$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \chi \\ \hline \end{array}}{\chi} e\vee$
\Rightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Rightarrow \psi} i\Rightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} e\Rightarrow$
\Leftrightarrow	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline \psi \\ \vdots \\ \varphi \\ \hline \end{array}}{\varphi \Leftrightarrow \psi} i\Leftrightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi} e\Leftrightarrow_1 \quad \frac{\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi} e\Leftrightarrow_2$
\neg	$\frac{\begin{array}{ c } \hline \varphi \\ \vdots \\ \perp \\ \hline \end{array}}{\neg \varphi} i\neg$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} e\neg$
\top	$\frac{}{\top} i\top$	není
\perp	není	$\frac{}{\perp} e\perp$
$\neg\neg$	(netřeba) $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} i\neg\neg$	$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} e\neg\neg$

Pomocné pravidlo: pravidlo iterace (it).

Odvozené pravidlo LEM (zákon vyloučeného třetího, tertium non datur):

$$\frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{LEM}$$

Ve všech příkladech můžete předpokládat, že zadané řetězce jsou formulami výrokové logiky. Sestrojte důkazy přirozenou dedukcí. Pokud v úloze není řečeno jinak, nepomáhejte si využitím odvozeného pravidla LEM.

Základní příklady

1. $\neg a \Rightarrow \neg b \vdash b \Rightarrow a$.
2. $\neg(a \Rightarrow b) \vdash \neg b$.
3. $\neg(a \Rightarrow b) \vdash a$.

Delší nepřímé důkazy

1. $\neg p \Rightarrow (q \vee r), \neg q, \neg r \vdash p$.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$.

Příklady s využitím LEM V těchto příkladech využijte ke zkrácení důkazu pravidlo vyloučeného třetího (LEM).

1. $a \Rightarrow b \vdash \neg a \vee b$.
2. $\vdash a \Rightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b))$.

Příklady s ekvivalencí

1. $\phi \Leftrightarrow \psi \vdash (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$.
2. $(\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi) \vdash \phi \Leftrightarrow \psi$.
3. $\vdash \neg(a \Leftrightarrow \neg a)$.
4. $a \Leftrightarrow b \vdash (\neg a \Leftrightarrow \neg b)$.

Odvození $e_{\neg\neg}$ z LEM Bez použití pravidla $e_{\neg\neg}$ a s použitím LEM dokažte

$$\neg\neg\phi \vdash \phi.$$

Disjunktivní sylogismus Jako *disjunktivní sylogismus* označujeme pravidlo

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg\psi}{\phi} \text{ DS}$$

1. Odvod'te DS pomocí pravidla e_{\perp} .
2. Odvod'te pravidlo e_{\perp} pomocí DS.

Detektivní úloha Jako vyšetřovatel znáte následující fakta:

1. Pokud byla Sarah opilá, pak James vraždil nebo Sarah lhala.
2. Určitě nastala alespoň jedna možnost z:
 - James vraždil.
 - Sarah nebyla opilá a vraždilo se o půlnoci.
3. Pokud se vraždilo o půlnoci, tak James vraždil nebo Sarah lhala.
4. Sarah střízlivá nelže.

Dá se na základě těchto fakt zjistit, zda vraždil James?

1. Výše zmíněná fakta a hypotézu formalisujte pomocí výrokové logiky.
2. Ověřte platnost výsledného logického důsledku přirozenou dedukcí.

Nepovinné domácí cvičení Dokažte

$$\vdash ((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a.$$