Úlohy

Příklad 1. Mějme graf G bez smyček, který má n vrcholů, m hran. Zkuste se přesvědčit, že platí:

a) $\chi(G) \leq n$

b) $\chi(G)\alpha(G) \geq n$

c) $\chi(G)(\chi(G)-1) \leq 2m$

Příklad 2. Na šachovnici rozmístěte

a) co nejvíce dam tak, aby se neohrožovaly.

b) co nejméně dam tak, aby ovládaly všechna pole.

Jak by se tyto úlohy daly modelovat grafem? Jaký algoritmus by nám pomohl při hledání řešení?

Příklad 3. Jak by předchozí úloha vypadala s věžemi místo dam?

Příklad 4. Platí nějaký jednoduchý vztah mezi nezávislostí a dominancí grafu?

Příklad 5. Naleznete jednoduchý vztah mezi klikovostí a barevností grafu?

Příklad 6. Vyřešte grafově pisoárový problém.

Příklad 7. Určete nezávislost, dominanci a chromatické číslo

a) pro cestu o n vrcholech

b) pro kružnici o $n \geq 3$ vrcholech

c) pro hvězdu o n vrcholech

d) pro kolo o $n \geq 4$ vrcholech

e) pro úplný graf K_n

f) pro úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

Příklad 8. O grafu G víte, že je nesouvislý. Jak budete hledat jeho barevnost?

Příklad 9. Graf G nazýváme kritickým, pokud pro každý jeho vlastní podgraf H platí $\chi(H) < \chi(G)$. Graf nazýváme k-kritickým, pokud je k-barevný a kritický.
Ukažte, že každý kritický graf je souvislý.

Příklad 10. Dokažte: když je G graf, jenž je k-kritický, platí

$$\delta(G) \geq k-1,$$

kde $\delta(G)$ označuje nejmenší stupeň vrcholu v G.

Příklad 11. Dokažte: každý k-barevný graf má alespoň k vrcholů stupně alespoň $k-1$.
Dokažte: Pro libovolný graf G platí, že

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1,$$

kde $\Delta(G)$ označuje největší stupeň vrcholu v G.

Opakování definic

Definice 12. Graf G je k-barevný, pokud lze obarvit k barvami. Barevnost grafu je nejmenší počet barev potřebný k obarvení grafu.

Definice 13. Nezávislá množina vrcholů N grafu G je taková podmnožina vrcholů grafu G, jejíž žádné dva vrcholy nejsou v G spojeny hranou.
Nejpočetnější nezávislá množina je nezávislá množina s největším počtem prvků; tento počet nazýváme nezávislostí grafu G.

Definice 14. Dominující množina vrcholů D grafu G je taková podmnožina vrcholů grafu G, která svou množinou sousedů pokrývá všechny zbývající uzly grafu G.
Dominance grafu G je počet vrcholů nejméně početné dominující množiny G.

Definice 15. Klika v grafu G je maximální podgraf grafu G, který je úplným grafem. Klikovost grafu je počet vrcholů v jeho největší klice.

Nezávislost grafu G značíme $\alpha(G)$.
Dominanci grafu G značíme $\beta(G)$.
Barevnost (či chromatické číslo) grafu G značíme $\chi(G)$.
Klikovost grafu G značíme $\omega(G)$.

Challenge

Příklad 16. Dá se jednoduše odvodit barevnost, nezávislost a dominance u hyperkrychle?
Nebo u sítě z $m \times n$ čtverců?
Nebo ze sítě rovnostranných trojúhelníků, které tvoří samy rovnostranný trojúhelník (o straně n)?
Jak by to vypadalo s grafem tvaru včelí plástve?

Příklad 17. Určete barevnost, nezávislost a dominanci u grafu definovaného rekurentně. Graf G_1 je diskrétní graf o jednom vrcholu, G_2 je trojúhelník. Graf G_n je trojice grafů G_{n-1} se třemi přidanými hranami tak, aby vzniknul "pseudo-trojúhelník".

Příklad 18. Máte graf G a rozpůlíte jeho hrany. To znamená, že každou jeho hranu nahradíte dvěma hranami, které mají uprostřed nový vrchol. Odvoďte nějaké tvrzení o barevnosti nového grafu.

Příklad 19. Co kdybychom dovolili kreslit nekonečné grafy? Jak by vypadaly dvoubarevné grafy?

Příklad 20. Jaký je maximální počet hran v dvoubarevném grafu s jednadvaceti uzly?